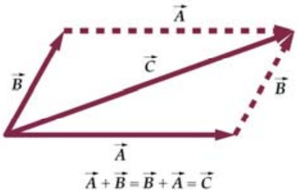
Anàlisi Vectorial

Suma de vectors:

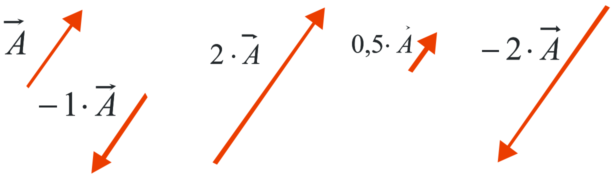
Conmutativa i associativa



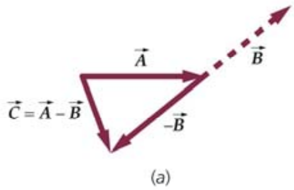
$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z)$$

Producte d'un escalar per un vector:

$$\lambda\cdot\vec{A}=(\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z)$$



Diferència de vectors

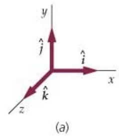


$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-1\cdot\vec{B})=(A_x-B_x, A_y-B_y, A_z-B_z)$$

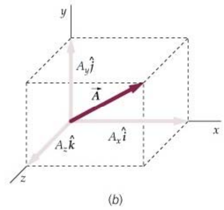
Anàlisi Vectorial

Vectors unutaris

$$\vec{u}_A=\frac{\vec{A}}{A}$$



$$\vec{A}=A\cdot\vec{u}_A$$

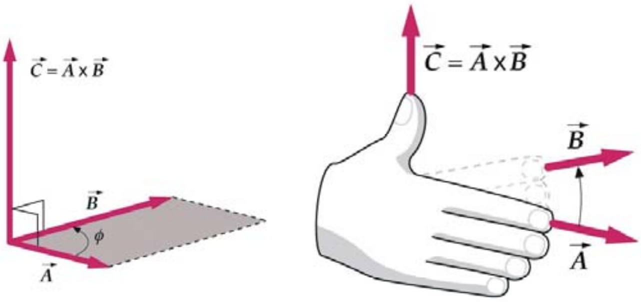


$$\vec{A}=A_x\cdot\vec{i}+A_y\cdot\vec{j}+A_z\cdot\vec{k}$$

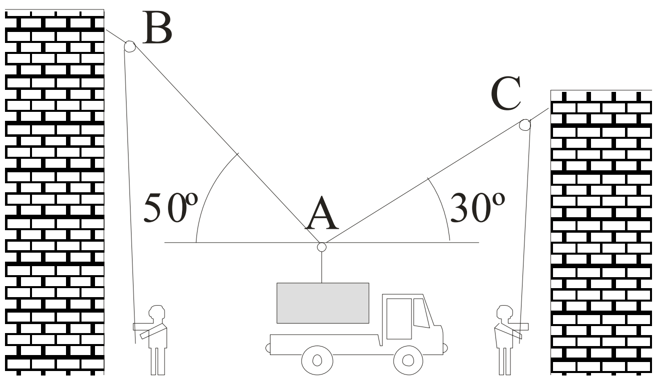
Producte vectorial:

$$\vec{A}\times\vec{B}=A\cdot B\cdot\sin\phi\cdot\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

Anticonmutativa: $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

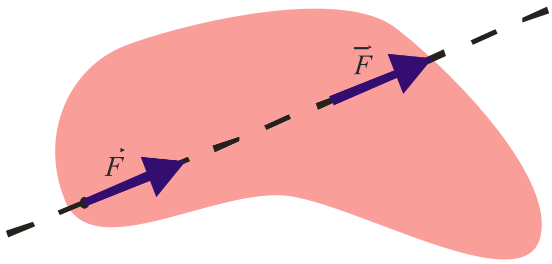


Donada una caixa de fusta de 75 kg tal i com s'indica a la figura. Es vol carregar aquesta caixa sobre el camió, i per això es suspèn de dos cables que passen per dues corrioles clavades als edificis. Calculeu la tensió de cadascuna de les cordes.



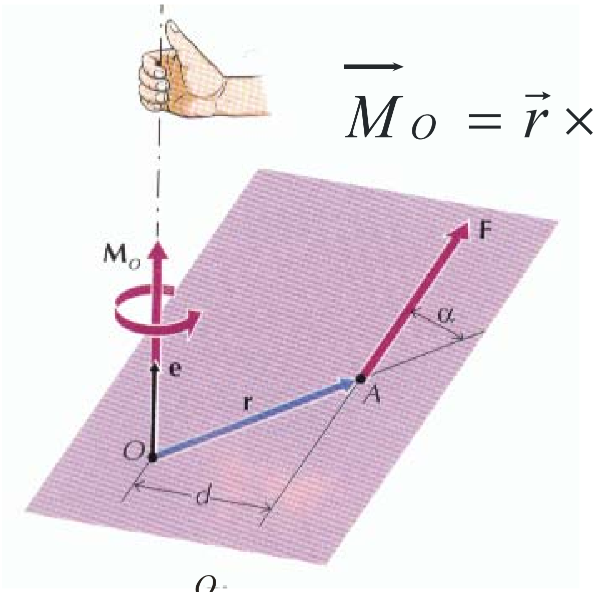
Principi de Transmissibilitat

Les condicions de moviment o equilibri en un sòlid rígid no canvien si una força que actua en un punt es despalça al llarg de la seva línia d'aplicació.

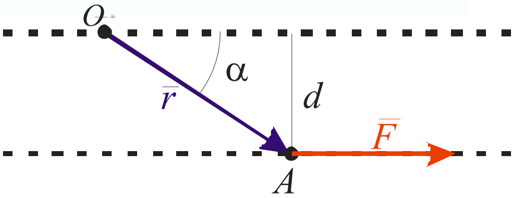


Forces sobre objectes puntuals: vectors fixes
Forces sobre sòlids rígids: vectors lliscants

Moment de força respecte un punt

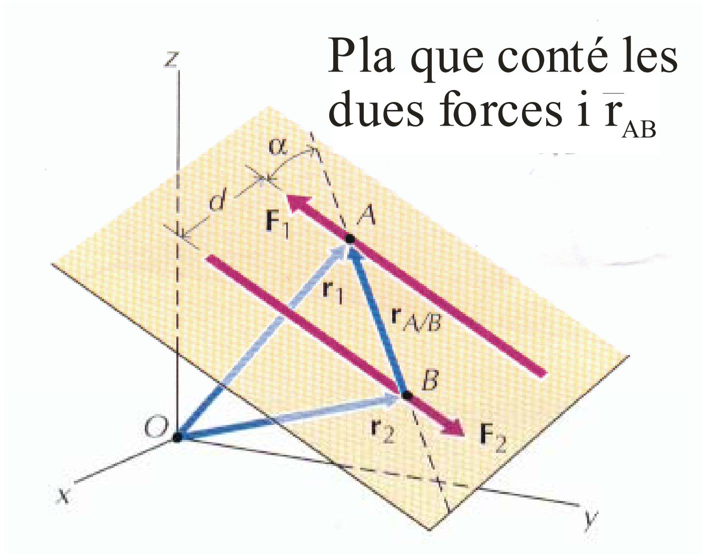


$$\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$M = rF\sin\alpha = \begin{cases} r\sin\alpha \cdot F = d \cdot F \\ r \cdot F\sin\alpha = r \cdot F_{\perp} \end{cases}$$

Moment d'un parell de Forces



$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

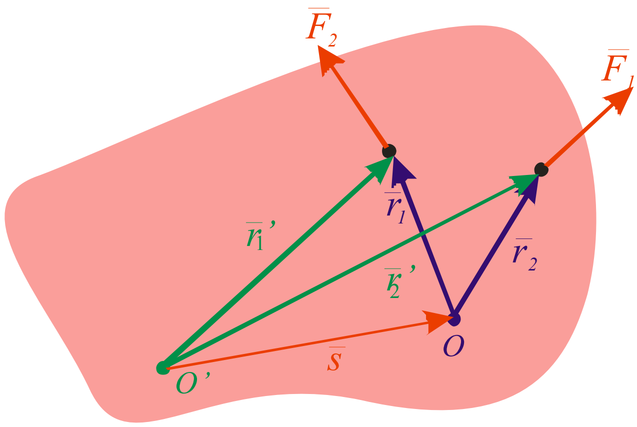
$$M_O = r_{AB} F \cdot \sin\alpha = F \cdot d$$

El moment d'un parell de forces és independent del punt de referència, *O*, triat.

La condició d'equilibri del S.R. és independent del punt de referència triat

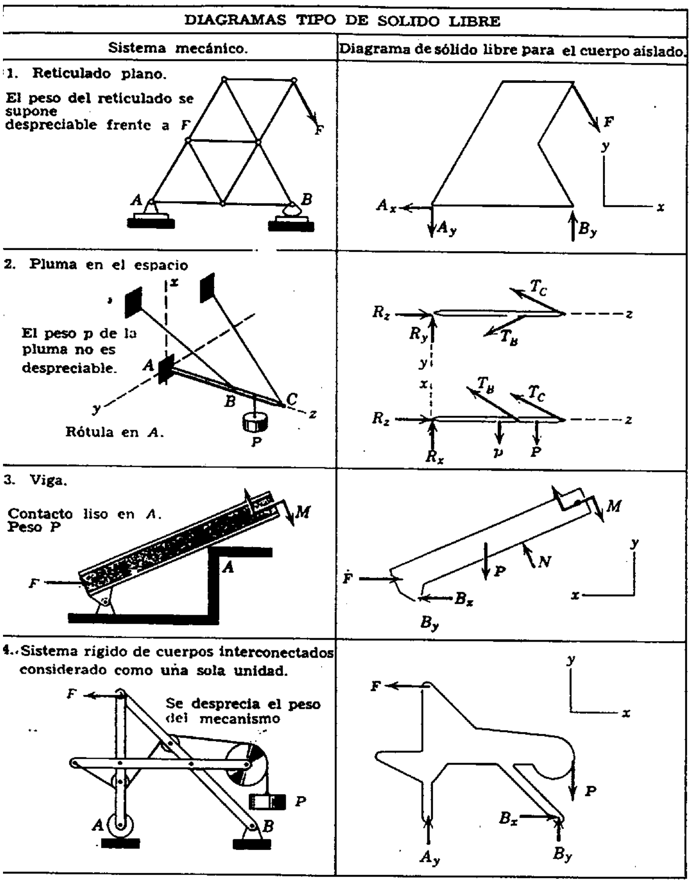
Condició d'equilibri:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad i \quad \sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

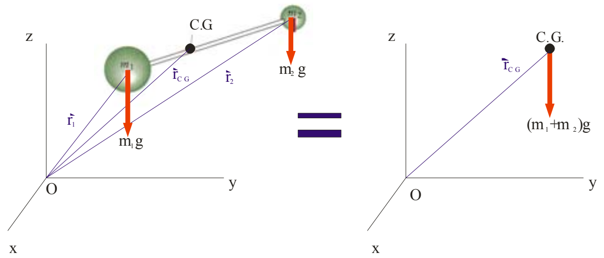


$$\sum \vec{M}_O' = \vec{r}_1' \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2' \times \vec{F}_2 + \ldots$$
$$= (\vec{s} + \vec{r}_1) \times \vec{F}_1 + (\vec{s} + \vec{r}_2) \times \vec{F}_2 + \ldots$$
$$= (\vec{s} \times \vec{F}_1 + \vec{s} \times \vec{F}_2 + \ldots) + (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F} + \ldots)$$
$$= \vec{s} \times \sum \vec{F} + \sum \vec{M}_O = \vec{0} + \vec{0}$$

Apoyo o enlace	Reacción	Número de incógnitas
Rodillos, Balancín, Superficie lisa	Fuerza de dirección conocida	1
Cable, Biela	Fuerza de dirección conocida	1
Deslizadera, Pasador en ranura lisa	Fuerza de dirección conocida	1
Articulación, Superficie rugosa	Fuerza de dirección desconocida	2
Empotramiento	Fuerza y par	3



Càlcul del Centre de Gravetat



$$\sum \vec{M}_O = \vec{r}_1 \times -m_1 g\vec{j} + \vec{r}_2 \times -m_2 g\vec{j} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)\times -g\vec{j} =$$

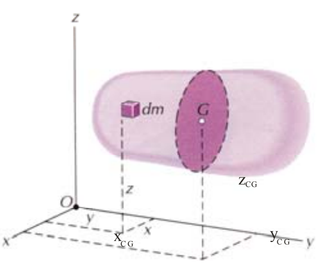
$$\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}\right)\times -(m_1+m_2)g\vec{j} = \vec{r}_{CG}\times \vec{F}_R$$

Sistema equivalent:

$$F_R = (m_1+m_2)g$$

$$\vec{r}_{CG} = \left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}\right)$$

Càlcul del Centre de Gravetat en sòlids



$$\vec{r}_{CG} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm} \qquad \begin{cases} x_{CG} = \dfrac{\int x\,dm}{\int dm} \\ y_{CG} = \dfrac{\int y\,dm}{\int dm} \\ z_{CG} = \dfrac{\int z\,dm}{\int dm} \end{cases}$$

Càlcul per volums

Desitat, massa per unitat de volum: $\rho = \dfrac{dm}{dV} \quad \left[\dfrac{M}{L^3}\right]$

$$\vec{r}_{CG} = \frac{\int \vec{r}\rho\,dV}{\int \rho\,dV}$$

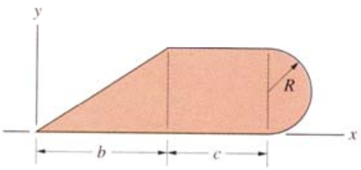
Medis homogenis, ρ no depèn de la posició.

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}, \quad \vec{r}_{CG} = \frac{\rho\int \vec{r}\,dV}{\rho\int dV} = \frac{\int \vec{r}\,dV}{\int dV}, \text{ centre geomètric}$$

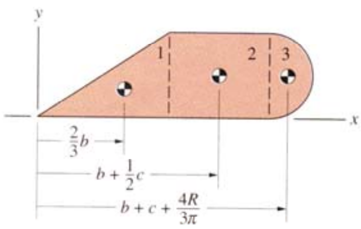
Càlcul per superfícies homogènies

$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A}, \quad \vec{r}_{CG} = \frac{\int \vec{r}\,dA}{\int dA}, \text{ centre geomètric}$$

Càlcul del Centre de Gravetat per parts



Coordenada x:



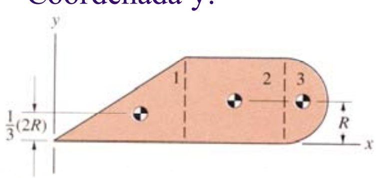
$$x_1 = \left(\frac{2}{3}b\right), \quad A_1 = \left[\frac{1}{2}b(2R)\right]$$

$$x_2 = \left(b+\frac{1}{2}c\right), \quad A_2 = [c(2R)]$$

$$x_3 = \left(b+c+\frac{4R}{3\pi}\right), \quad A_3 = \left[\frac{1}{2}\pi R^2\right]$$

$$x_{CG} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{A_1+A_2+A_3} = \frac{\left(\frac{2}{3}b\right)\left[\frac{1}{2}b(2R)\right] + \left(b+\frac{1}{2}c\right)[c(2R)] + \left(b+c+\frac{4R}{3\pi}\right)\left[\frac{1}{2}\pi R^2\right]}{\frac{1}{2}b(2R) + c(2R) + \frac{1}{2}\pi R^2}$$

Coordenada y:



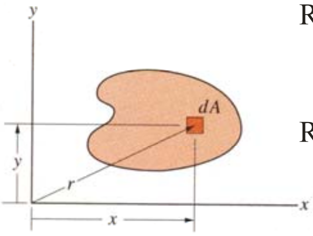
$$y_1 = \left(\frac{1}{3}2R\right), \quad A_1 = \left[\frac{1}{2}b(2R)\right]$$

$$y_2 = R, \quad A_2 = [c(2R)]$$

$$y_3 = R, \quad A_3 = \left[\frac{1}{2}\pi R^2\right]$$

$$y_{CG} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1+A_2+A_3} = \frac{\left(\frac{1}{3}2R\right)\left[\frac{1}{2}b(2R)\right] + R[c(2R)] + R\left[\frac{1}{2}\pi R^2\right]}{\frac{1}{2}b(2R) + c(2R) + \frac{1}{2}\pi R^2}$$

Moments d'inèrica de superficies homogènies



Respecta l'eix x

$$I_x = \frac{m\int y^2 dA}{A} = \sigma \int y^2 dA$$

Respecta l'eix y

$$I_y = \frac{m\int x^2 dA}{A} = \sigma \int x^2 dA$$

Unitats: $[M][L]^2$

Moments de segon ordre

Respecta l'eix x

$$I_{e,x} = \int y^2 dA \Rightarrow I_x = \sigma \cdot I_{e,x}$$

Respecta l'eix y

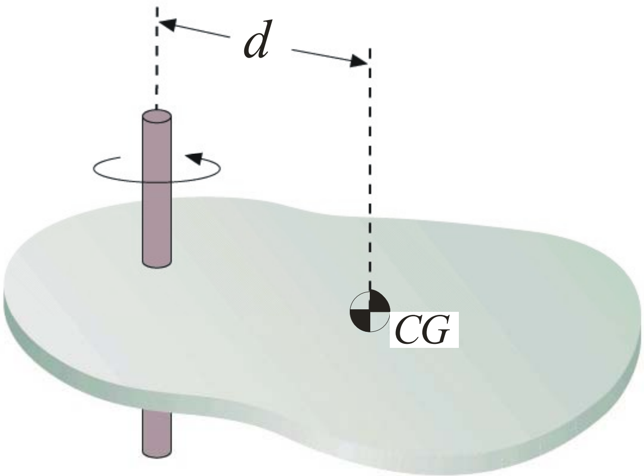
$$I_{e,y} = \int x^2 dA \Rightarrow I_y = \sigma \cdot I_{e,y}$$

Unitats: $[L]^4$

Radi de gir: $R_{G,x} \equiv \sqrt{\dfrac{I_x}{m}}$ i $R_{G,y} \equiv \sqrt{\dfrac{I_y}{m}}$ Unitats: [L]

$$I_x = m \cdot R_{G,x}^2 \ i \ I_y = m \cdot R_{G,y}^2$$

Teorema dels eixos paral·lels



Moments de segon ordre

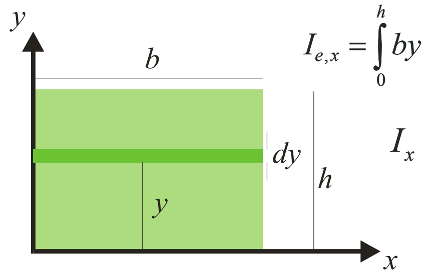
Superfícies: $I_{e,O} = I_{e,CG} + d^2 A$

Volums: $I_{e,O} = I_{e,CG} + d^2 V$

Moments d'inèrica

$$I_0 = I_{CM} + md^2$$

Moments d'Inèrcia d'una superfície plana



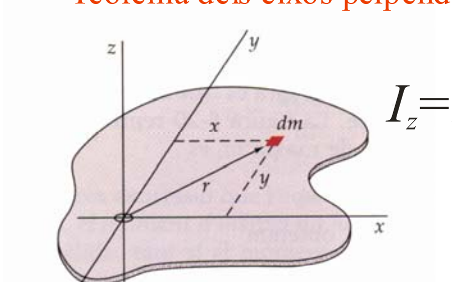
$$I_{e,x} = \int_0^h by^2 dy = \frac{1}{3} by^3 \Big|_0^h = \frac{1}{3} bh^3$$

$$I_x = \sigma \frac{1}{3} bh^3 = \frac{1}{3} mh^2$$

$$R_{G,x} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} mh^2}{m}} = \frac{1}{\sqrt{3}} h$$

$$I_{e,y} = \frac{1}{3} hb^3, \quad I_y = \frac{1}{3} mb^2, \quad R_{G,y} = \frac{1}{\sqrt{3}} b$$

Teorema dels eixos perpendiculars



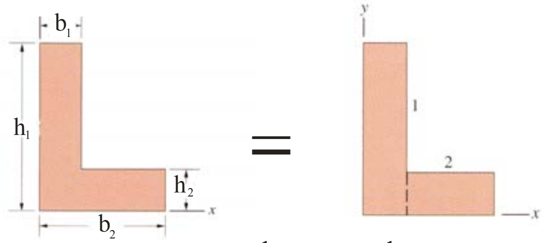
$$I_z = I_x + I_y$$

només vàlid per superfícies planes

Rectangle:

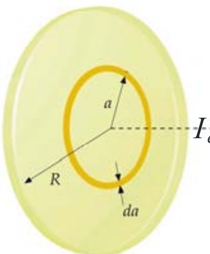
$$I_{e,y} = \frac{1}{3}(bh^3 + hb^3), \quad I_z = \frac{1}{3} m(h^2 + b^2), \quad R_{G,y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(h^2 + b^2)}$$

Propietat, aditivitat:



$$I_{e,x} = I_{e,x,1} + I_{e,x,2} = \frac{1}{3} b_1 h_1^3 + \frac{1}{3}(b_2 - b_1) h_2^3$$

Moment d'inèrcia d'un disc

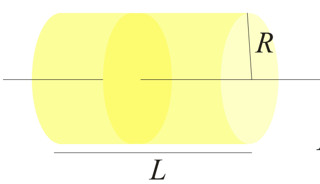


$$dA = 2\pi a da$$

$$I_{e,x} = \int_0^R a^2 dA = \int_0^R a^2 2\pi a da = \frac{\pi}{2} a^4 \Big|_0^R = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$I_x = \sigma \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{1}{2} mR^2$$

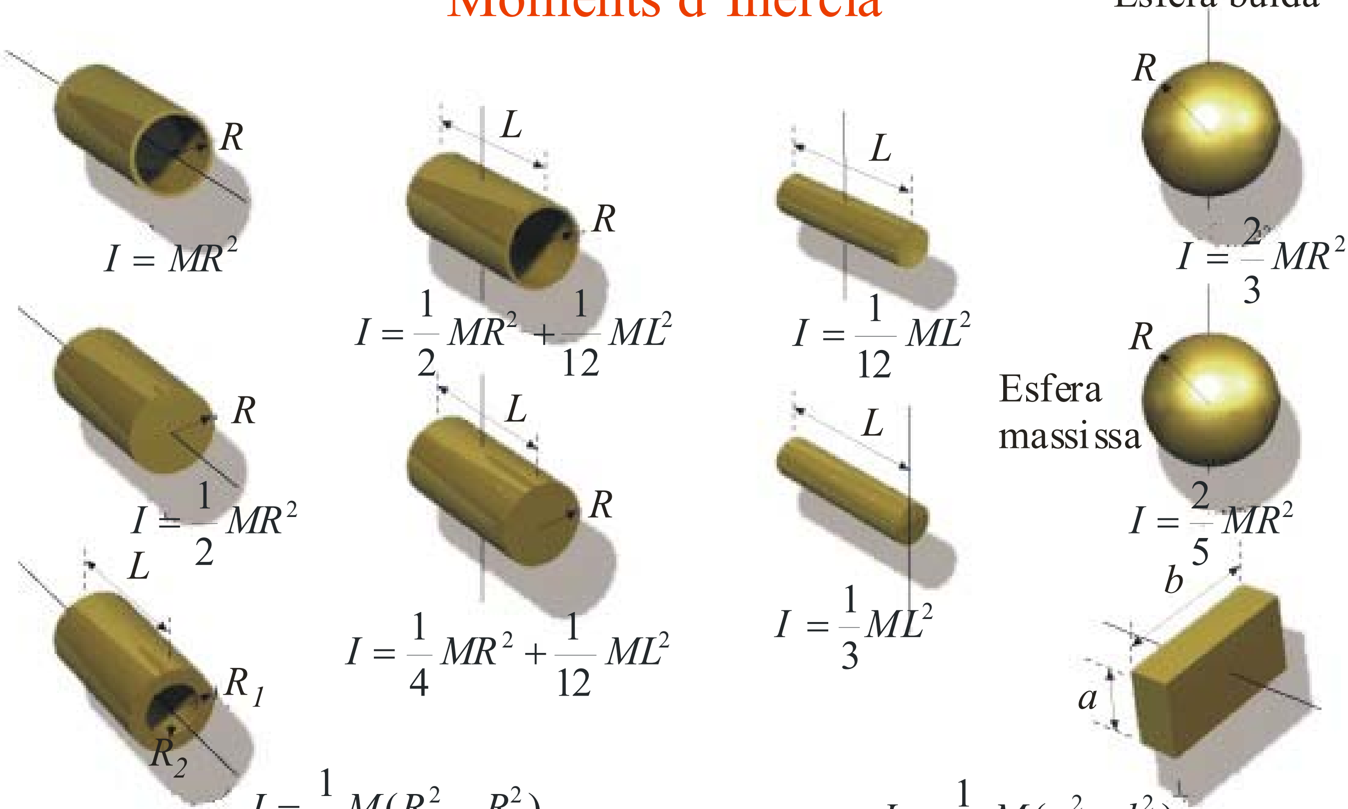
Moment d'inèrcia d'un anell



$$dI_x = \frac{1}{2} dmR^2$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^L \frac{1}{2} dmR^2 = \frac{1}{2} mR^2$$

Moments d'Inercia



$$I = MR^2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

Esfera buida: $$I = \frac{2}{3}MR^2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

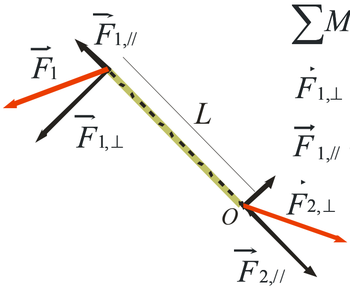
$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Esfera massissa: $$I = \frac{2}{5}MR^2$$

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 - R_2^2)$$

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

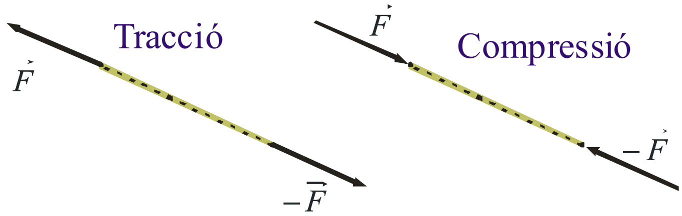
Estructures



$$\sum M_O = F_{1,\perp}\cdot L = 0 \Rightarrow F_{1,\perp} = 0$$

$$\vec{F}_{1,\perp} + \vec{F}_{2,\perp} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{2,\perp} = 0$$

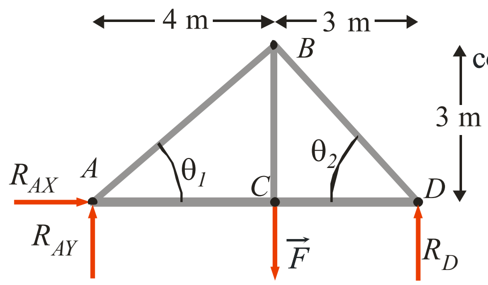
$$\vec{F}_{1,//} + \vec{F}_{2,//} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{2,//} = -\vec{F}_{1,//}$$



Resolució pel mètode dels nusos:

- *Càlcul de les forces externes a partir de considerar l'estructura com un únic objecte*
- *Resolució de l'equació de forces per cadascun dels nusos per tal d'obtenir les tensions a les barres de l'estructura*

Estructures



$$\cos\theta_2 = \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

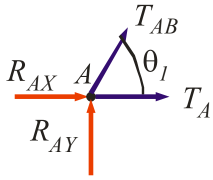
$$\cos\theta_1 = \frac{4}{5}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{3}{5}$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow 4\cdot F = 7\cdot R_D \Rightarrow \boxed{R_D = 343\,N}$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_{AY} + R_D = F = 600\,N \\ R_{AX} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} R_{AY} = 342{,}8\,N \\ R_{AX} = 0 \end{cases}}$$

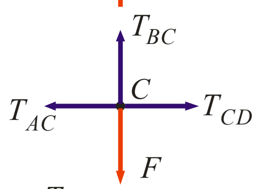
Nusos:



$$\begin{cases} R_{AX} + T_{AC} + T_{AB}\cos\theta_1 = 0 \\ R_{AY} + T_{AB}\sin\theta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AB} = -428{,}6\,N \\ T_{AC} = 342{,}8\,N \end{cases}$$

Compressió

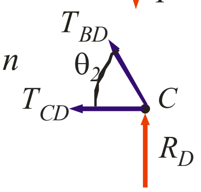
Tracció



$$\begin{cases} T_{CD} = T_{AC} = 342{,}8\,N \\ T_{BC} = F = 600\,N \end{cases}$$

Tracció

Tracció



$$\begin{cases} T_{BD}\cos\theta_2 + T_{CD} = 0 \\ R_D + T_{BD}\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_{BD} = -484{,}8\,N$$

Compressió