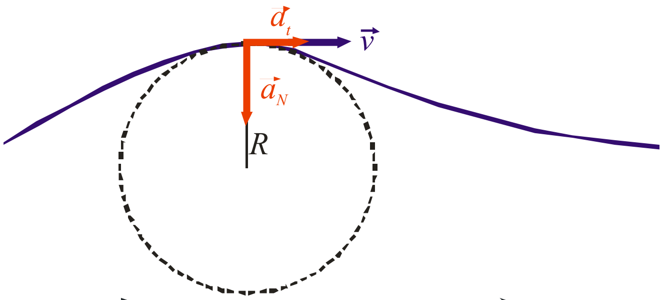
Acceleracions tangencial i centrípeta



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} v\vec{u} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_N$$

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} \text{ estableix el canvi del mòdul de la velocitat} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \text{ estableix el canvi de direcció de la velocitat} \end{cases}$$

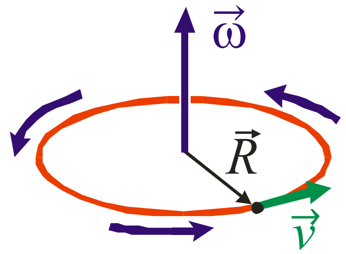
$$\begin{cases} \sum F_t = m \cdot a_t \\ \sum F_N = m \cdot \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

Casos particulars:

$R = \infty \Rightarrow a_N = 0$, moviment rectilini

$R = \text{ct}$ moviment circular

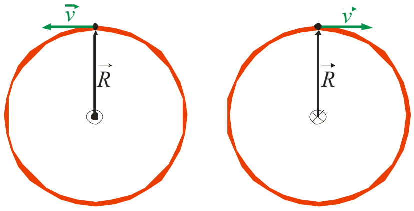
Velocitat i acceleració angular



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Notació:

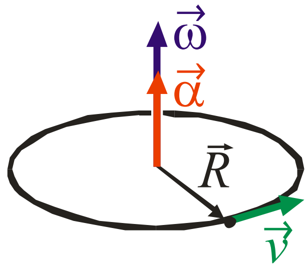


$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{R}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_N}$$

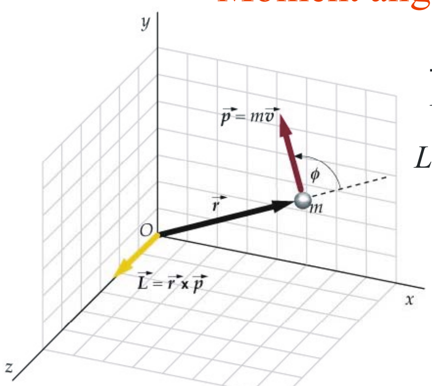
Acceleració angular:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \text{unitats rad/s}^2$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{R} \Rightarrow a_t = \alpha \cdot R$$



Moment angular

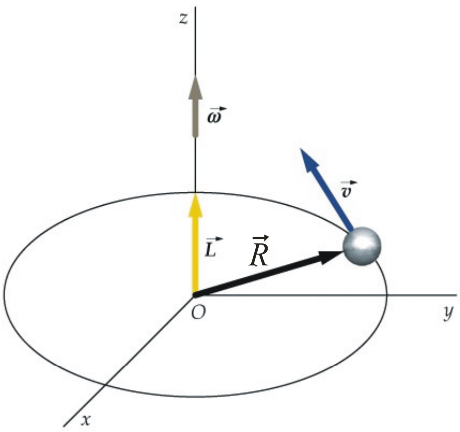


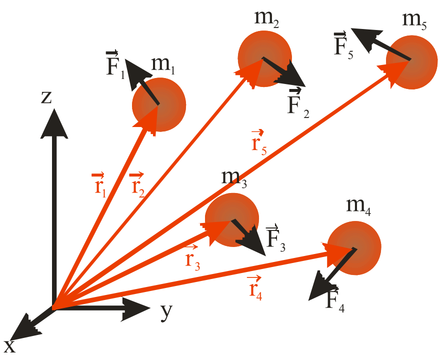
$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$L_O = rp\sin\phi = rmv\sin\phi$$

Moviment circular:

$$L_O = Rmv = mR^2\omega = I_O\omega \Rightarrow \vec{L}_O = I_O\vec{\omega}$$





Definició del Centre de Masses

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{M_T}$$

Moviment del Centre de Masses

$$\vec{F}_{Ext,R} = \sum_i \vec{F}_i = M_T\vec{a}_{CM} = M_T\frac{\partial\vec{v}_{CM}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{p}_{CM}}{\partial t}$$

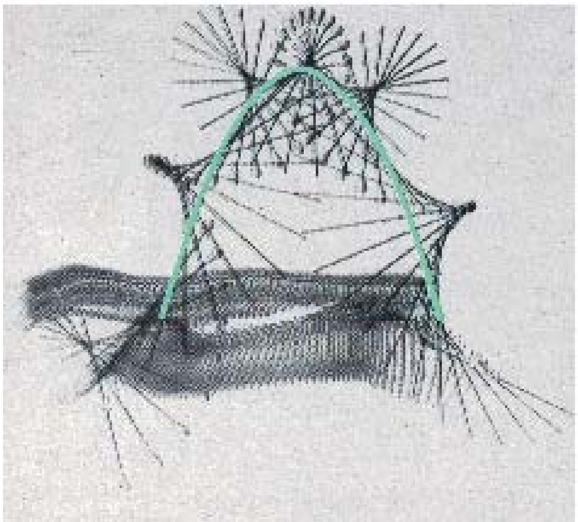
El centre de masses d'un sistema de partícules es mou com una partícula puntual de massa M_T sota l'acció de la força externa resultant que actua sobre el sistema.

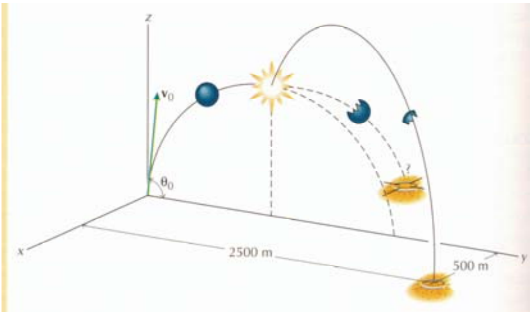
Llei de la conservació de la quantitat de moviment

$$\vec{p}_{CM} = \vec{p}_T = \sum_i m_i\vec{v}_i$$

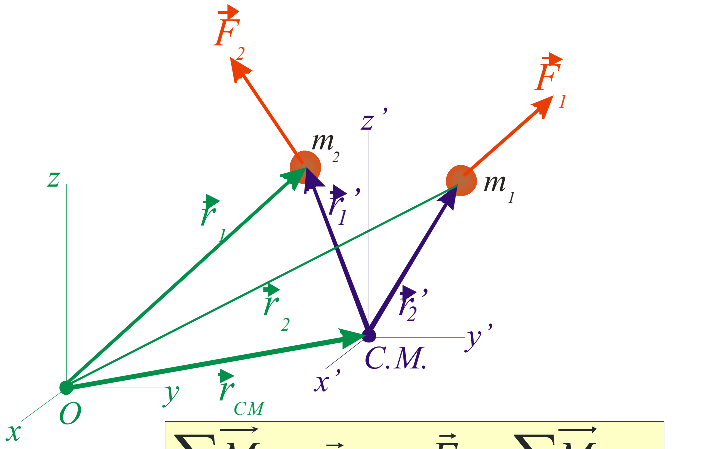
$$Si \quad \vec{F}_{Ext,R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{CM} = \vec{p}_T = constant$$

Moviment del Centre de Masses





Moviment relatiu al Centre de Masses



$$\boxed{\sum \overrightarrow{M}_O = \vec r_{C.M.} \times \vec F_R + \sum \overrightarrow{M}_{C.M.}}$$

$$\begin{cases} \vec r_i = \vec r_{C.M.} + \vec r_i\,' \\ \vec v_i = \vec v_{C.M.} + \vec v_i\,' \\ \vec a_i = \vec a_{C.M.} + \vec a_i\,' \end{cases}$$

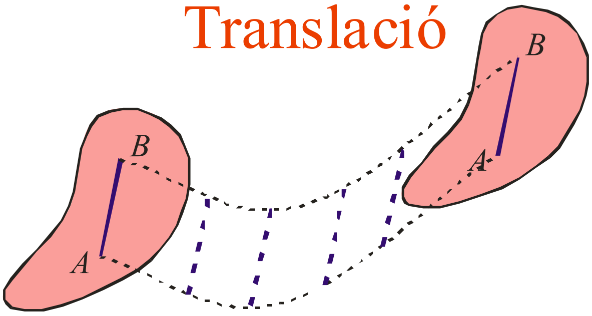
$$\vec L_{C.M.,R} = \sum_i \vec L_{C.M.,i} = \sum_i \vec r_i\,' \times m_i \vec v_i = \sum_i \vec r_i\,' \times m_i (\vec v_{C.M.} + \vec v_i\,')$$

$$= \sum_i \vec r_i\,' \times m_i \vec v_{C.M.} + \sum_i \vec r_i\,' \times m_i \vec v_i\,' = (\sum_i m_i \vec r_i\,') \times \vec v_{C.M.} + \sum_i \vec r_i\,' \times m_i \vec v_i\,'$$

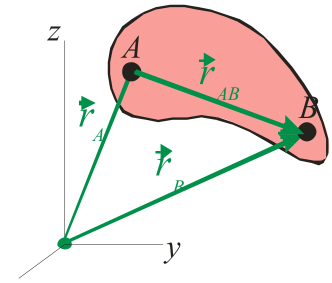
$$\vec L_{C.M.,R} = 0 + \sum_i \vec r_i\,' \times m_i \vec v_i\,' = \vec L_{C.M.,R}\,'$$

$$\sum \overrightarrow{M}_{CM} = \frac{d\vec L_{C.M.,R}}{dt} = \frac{d\vec L_{C.M.,R}\,'}{dt}$$

Translació



L'orientació d'un segment rectilini qualsevol dins del sòlid no canvia.

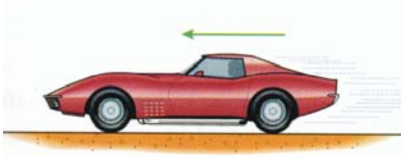


$$\vec r_B = \vec r_A + \vec r_{AB}$$

$$\frac{d\vec r_B}{dt} = \frac{d\vec r_A}{dt} + \frac{d\vec r_{AB}}{dt}$$

$$\vec v_B = \vec v_A\,,\ \vec a_B = \vec a_A$$

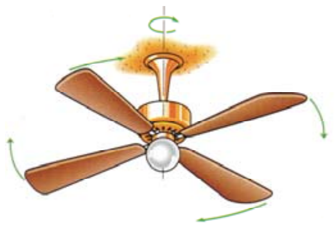
En un sòlid rígid en translació, tots els punts es mouen amb la mateixa velocitat i acceleració.

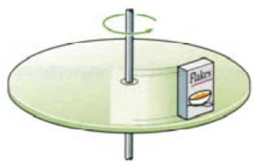


Translació rectilínia

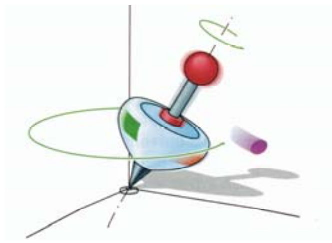
Translació curvilínea

Rotació



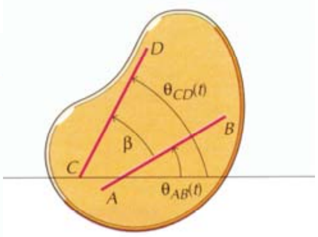


Les rotacions al voltant d'un eix fix són moviments coplanaris



Rotació al voltant d'un punt fix

La velocitat angular és la mateixa a tots els punts del sòlid rígid:

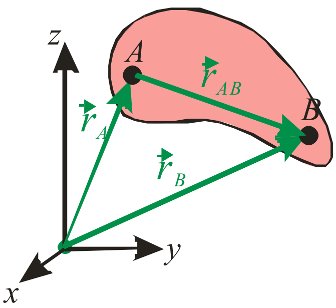


$$\theta_{CD} = \theta_{AB} + \beta$$

derivant:

$$\omega_{CD} = \omega_{AB}$$

Moviment general coplanari del S.R.



$$\vec r_B = \vec r_A + \vec r_{AB}$$

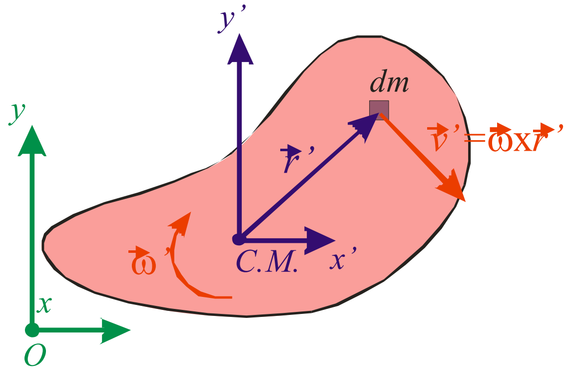
$$\frac{d\vec r_B}{dt} = \frac{d\vec r_A}{dt} + \frac{d\vec r_{AB}}{dt}$$

$$\vec v_B = \vec v_A + \vec\omega \times \vec r_{AB}$$

$$\vec a_B = \vec a_A + \vec\alpha \times \vec r_{AB} + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r_{AB})$$

El moviment d'un sòlid rígid es pot descomposar en una translació i una rotació

Dinàmica del Sòlid Rígid



$$\vec L_{CM,R} = \vec L_{C.M.,R}' = \int \vec r' \times dm \vec v' = \int \vec r' \times dm(\vec\omega \times \vec r')$$

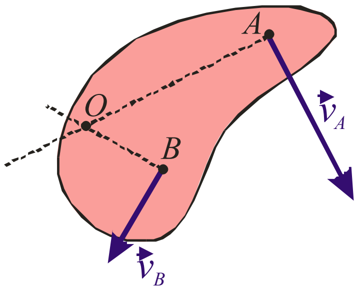
$$\vec L_{CM,R}' = \int r'^2\, dm \vec\omega = I_{CM}\vec\omega$$

$$\vec M_{R,CM} = \sum \vec M_{CM} = \frac{d\vec L_{CM,R}}{dt} = \frac{d\vec L_{CM,R}'}{dt} = I_{CM}\vec\alpha$$

$$\vec F_R = \sum \vec F = m\vec a_{CM}$$

$$\vec M_{R,CM} = \sum \vec M_{CM} = I_{CM}\vec\alpha$$

Localització de l'eix instantani de rotació

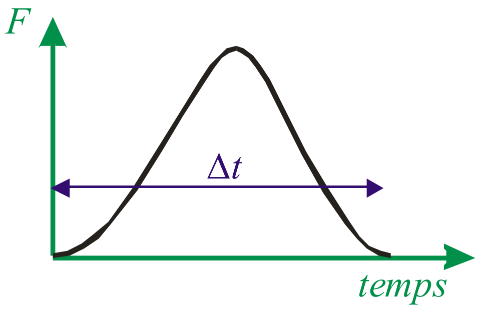


$$\vec v_A = \vec\omega \times \vec r_{OA}$$

$$\vec v_B = \vec\omega \times \vec r_{OB}$$

$$\vec v_A \perp \vec r_{OA},\ \vec v_B \perp \vec r_{OB}$$

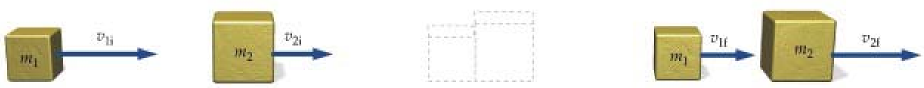
Impuls



$$\vec I = \int \vec F dt = \Delta\vec p, \quad \vec F_m = \frac{\Delta\vec p}{\Delta t}$$

$$\vec J_O = \int \vec M_O dt = \Delta\vec L_O, \quad \vec M_{O,m} = \frac{\Delta\vec L_O}{\Delta t}$$

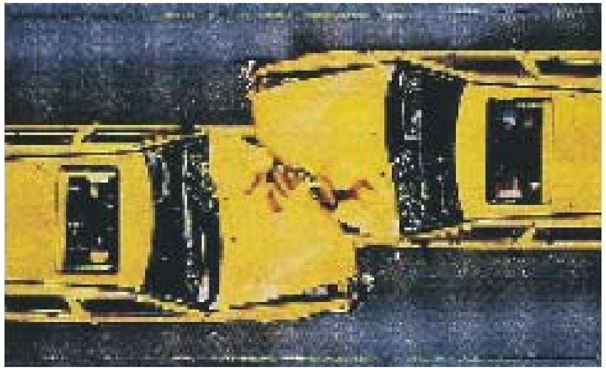
Xoc elàstic



$$m_1\vec v_{1,i} + m_2\vec v_{2,i} = m_1\vec v_{1,f} + m_2\vec v_{2,f}$$

$$v_{2,f} - v_{1,f} = -(v_{2,i} - v_{1,i})$$

Xoc perfectament inelàstic



$$m_1 \vec{v}_{1,i} + m_2 \vec{v}_{2,i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

Xoc inelàstic

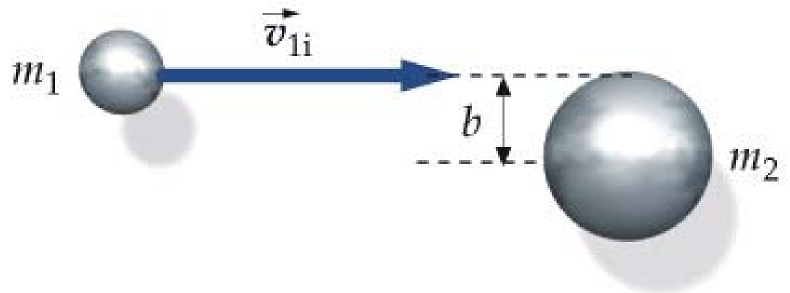
$$m_1 \vec{v}_{1,i} + m_2 \vec{v}_{2,i} = m_1 \vec{v}_{1,f} + m_2 \vec{v}_{2,f}$$

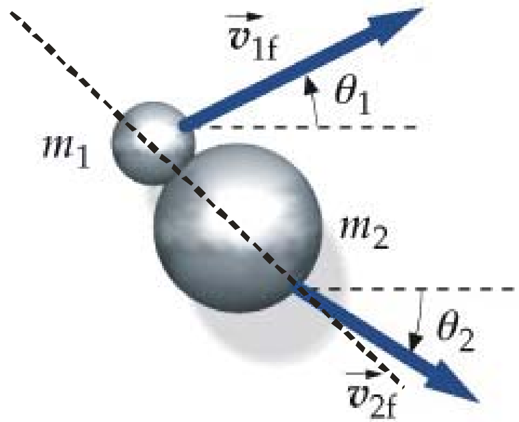
$$v_{2,f} - v_{1,f} = -e(v_{2,i} - v_{1,i})$$

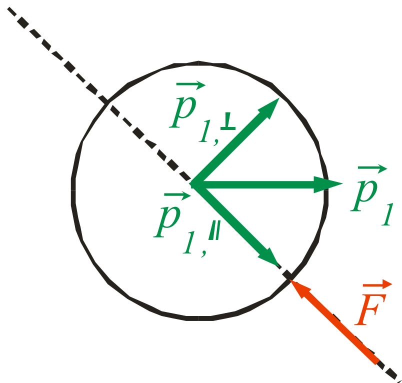
Coeficient de restitució

$$e \equiv -\frac{v_{2,f} - v_{1,f}}{(v_{2,i} - v_{1,i})}$$

Xoc en dues dimensions







PARTÍCULA PUNTUAL	S.R. TRANSLACIÓ	ROTACIÓ EIX FIX (EIX INSTANTANI DE ROTACIÓ)	CAS GENERAL S. R.
$\vec{F}_R = m\vec{a}$	$\vec{F}_R = m\vec{a}_{CM}$	$\vec{M}_{R,O} = I_O\vec{\alpha}$	$\vec{F}_R = m\vec{a}_{CM}$ $\vec{M}_{R,O} = I_O\vec{\alpha}$
$\vec{p} = m\vec{v};\ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R$	$\vec{p} = m\vec{v}_{CM};\ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R$	$\vec{L}_O = I_O\vec{\omega};\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{R,O}$	$\vec{p} = m\vec{v}_{CM};\ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R$ $\vec{L}_O = I_O\vec{\omega};\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{R,O}$
$W = \int \vec{F} d\vec{s}$	$W = \int \vec{F} d\vec{s}_{CM}$	$W = \int M_O d\theta$	$W = \int \vec{F} d\vec{s}_{CM} + \int M_{CM} d\theta$
$E_C = \frac{1}{2}mv^2$	$E_C = \frac{1}{2}mv_{CM}^2$	$E_C = \frac{1}{2}I_O\omega^2$	$E_C = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$
$Pot = \vec{F}\vec{v}$	$Pot = \vec{F}_R\vec{v}_{CM}$	$Pot = M_O\omega$	$Pot = \vec{F}_R\vec{v}_{CM} + M_{CM}\omega$