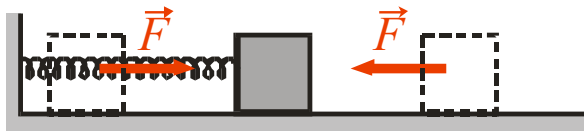


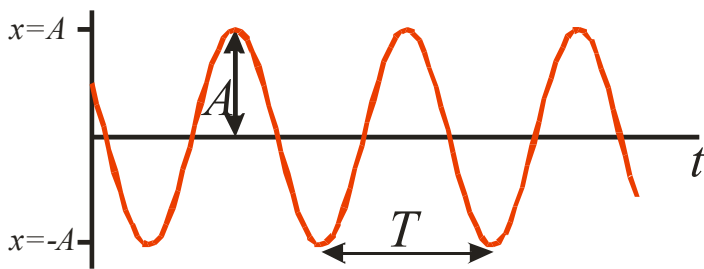
Moviment Harmònic simple



$$F = ma \Rightarrow -Kx = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$$

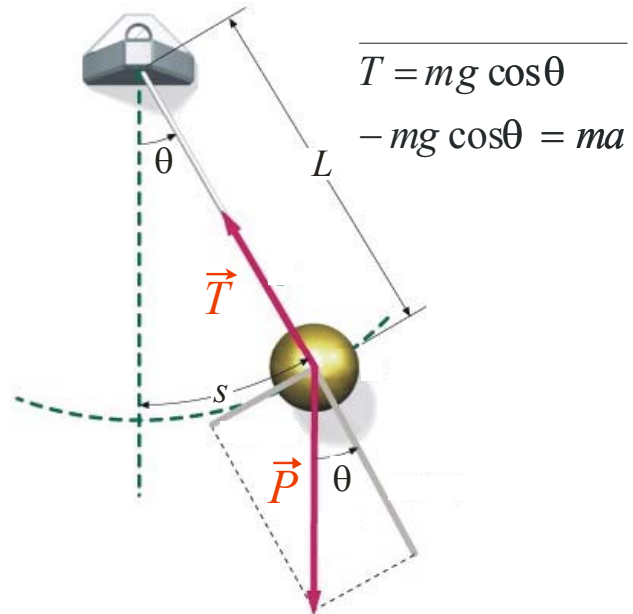
$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Solució: $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Pèndol simple



$$T = mg \cos \theta$$

$$-mg \cos \theta = ma$$

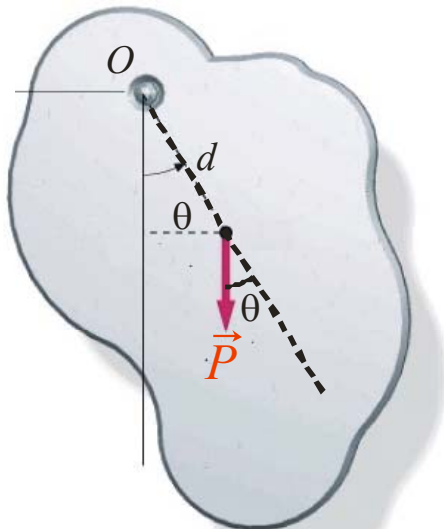
$$g \sin \theta = a = \ddot{s} = L \ddot{\theta}$$

Oscil·lacions petites: $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pèndol Físic



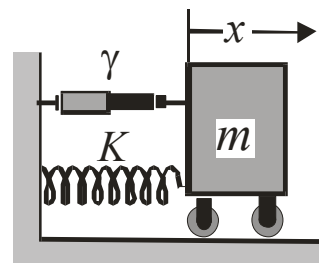
$$\sum M_O = I_O \alpha = I_O \ddot{\theta} \Rightarrow -mgd \sin \theta = I_O \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_O} \sin \theta = 0$$

Oscil·lacions petites: $\sin \theta \approx \theta \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_O} \theta = 0$

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_O} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgd}}$$

Oscil·lacions esmorteïdes



$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - Kx$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{K}{m} x = 0$$

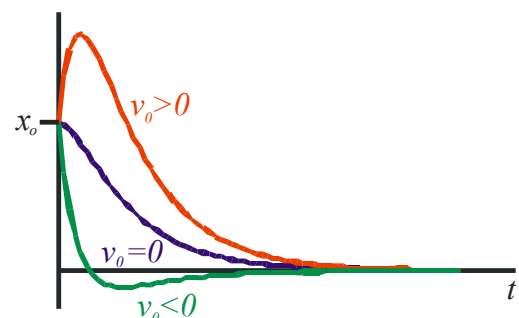
$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Raó d'amortiment adimensional: $\zeta \equiv \frac{\beta}{2\omega_0}$

Tres solucions:

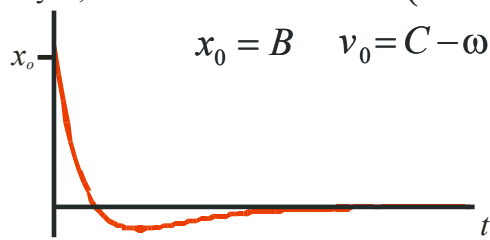
- $\zeta > 1$, moviment sobreamortit: $x = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}$

$$\lambda_{1,2} = \omega_0 \cdot \left| -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right| \quad \begin{aligned} x_0 &= A_1 + A_2 \\ v_0 &= -(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \end{aligned}$$



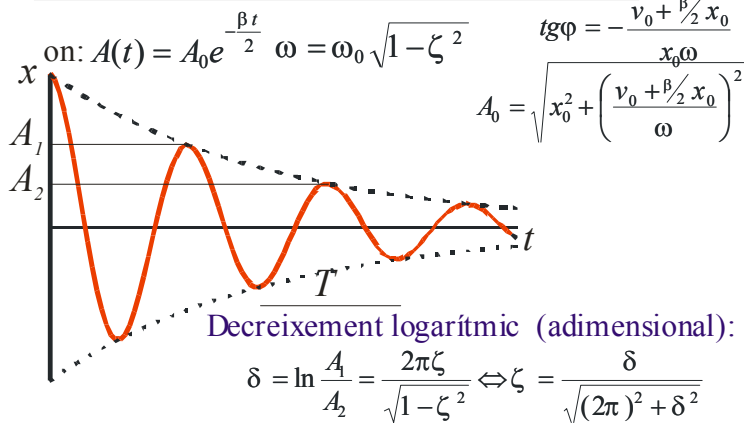
Oscil·lacions esmorteïdes

- $\zeta=1$, amortiment crític: $x = (B + Ct)e^{-\omega_0 t}$



- $\zeta < 1$, oscil·lacions amortides:

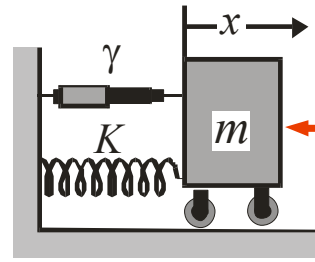
$$x = A_0 e^{-\frac{\beta t}{2}} \cos(\omega t + \varphi) = A(t) \cos(\omega t + \varphi)$$



Energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} K A_0^2 e^{-\beta t} = E_0 e^{-t/\tau} \quad \text{on: } E_0 = E(t=0) = \frac{1}{2} K A_0^2 \quad \tau = \frac{1}{\beta}$$

Oscil·lacions esmorteïdes



$$F = F_0 \cos \Omega t$$

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - Kx + F_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

$$\text{Equació diferencial: } \ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

$$\text{Solució: } x = x_T(t) + x_P(t)$$

$x_T(t)$: Transitori, oscil·lacions amortides

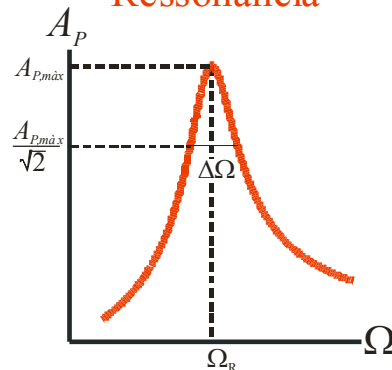
$x_P(t) = A_P \cos(\Omega t + \varphi_P)$ Oscil·lació permanent

La oscil·lació permanent té la mateixa freqüència que la força externa i no depèn de les condicions inicials

$$A_P = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2}}$$

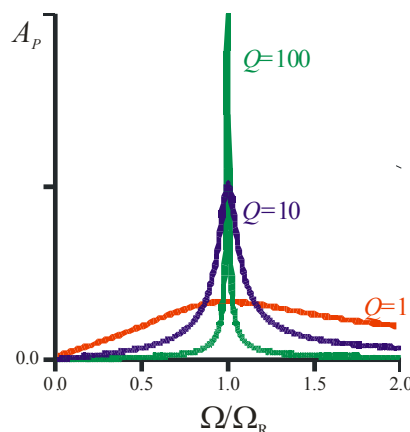
$$\text{tg} \varphi_P = -\frac{\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Ressonància



Freqüència de la força externa a la que l'amplitud és màxima:

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2}}$$



$$Q = \frac{\Omega_R}{\Delta\Omega} = 2\pi \frac{\tau}{T_R}$$

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

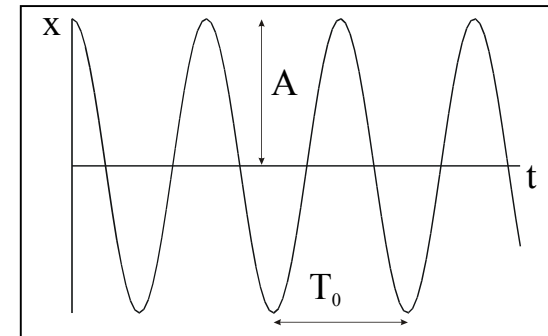
$$T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}$$

Oscil·lacions Lliures:

Equació diferencial $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, amb les condicions inicials: $x_0 = x(t=0)$ i $v_0 = v(t=0) = \dot{x}(t=0)$

Solució $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ on $A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2}$ i $\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$

Energia $E = \frac{1}{2} K A^2$



Oscil·lacions Esmorteïdes:

Equació diferencial $\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Raó d'amortiment (adimensional) $\zeta = \frac{\beta}{2\omega_0}$.

Solucions en funció d' ζ

- $\zeta > 1$ sobreamortit, $x = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}$ on
 $\lambda_{1,2} = \omega_0 \cdot \left| -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right|$, $x_0 = A_1 + A_2$ i $v_0 = -(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$
- $\zeta = 1$ Amortiment crític $x = (B + Ct) e^{-\omega_0 t}$ on $x_0 = B$ i $v_0 = C - \omega_0 B$
- $\zeta < 1$ Oscil·lacions amortides $x = A_0 e^{-\frac{\beta t}{2}} \cos(\omega t + \varphi) = A(t) \cos(\omega t + \varphi)$ on
 $A(t) = A_0 e^{-\frac{\beta t}{2}}$, $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta/2 x_0}{\omega} \right)^2} \text{ i } \operatorname{tg} \varphi = - \frac{v_0 + \beta/2 x_0}{x_0 \omega}$$

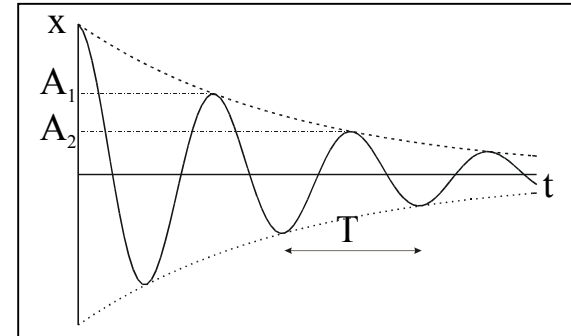
Decreixement logarítmic δ (adimensional): $\delta = \ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Leftrightarrow \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$

Energia: $E(t) = \frac{1}{2} K A_0^2 e^{-\beta t} = E_0 e^{-t/\tau}$, on $E_0 = E(t=0) = \frac{1}{2} K A_0^2$ i $\tau = \frac{1}{\beta}$.

τ és defineix com la *constant de temps* i és el temps característic de la desaparició de les oscil·lacions.

Es defineix el *factor de qualitat* Q com: $Q \equiv 2\pi \frac{\tau}{T} = \frac{\pi}{\delta}$ (adimensional)

Si les oscil·lacions són feblement amortides: $\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{2\pi}{Q} \Leftrightarrow Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}$



Oscil·lacions Forçades:

Equació diferencial $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$ Solució $x = x_T(t) + x_P(t)$

On $x_T(t)$ és un terme transitori i correspon a la solució de les oscil·lacions amortides (apartat anterior).

On $x_P(t)$ és un terme permanent i és igual a: $x_P(t) = A_P \cos(\Omega t + \varphi_P)$ i,

$$A_P = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \beta^2 \Omega^2}} \text{ i } \operatorname{tg} \varphi_P = - \frac{\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Freqüència de ressonància (amplitud màxima) $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2/2}$

$$Q = \frac{\Omega_R}{\Delta \Omega} = 2\pi \frac{\tau}{T_R}, \quad \text{on } \tau = \frac{1}{\beta}$$