## A. Aplicacions d'equacions diferencials ordinàries de primer ordre:

**A.1)** Hi ha rellotges que aprofiten l'energia del moviment de la mà i per tant funcionen sense piles, però quan la persona dorm el corrent el dóna la descàrrega d'un condensador de gran capacitat (s'anomena ultracondensador).

A) Plantegeu l'equació diferencial de la variació de càrrega al ultracondensador (el mecanisme del rellotge es pot aproximar a una resistència $R$ connectada en sèrie amb el condensador, la capacitat del qual és $C$). [Ajut: recordeu que $\Delta V = I \cdot R$ a la resistència i $\Delta V = Q / C$ al condensador]

B) Integrant-la, obteniu l'equació de la càrrega en funció del temps (trieu l'origen de temps quan es comença a descarregar i la càrrega és $Q_0$). Apliqueu integrals definides.

C) Repetiu l'apartat B), però ara aplicant integrals indefinides.

D) Un rellotge te $C$ = 1 F, $R$ = 112 kΩ, i deixa de funcionar quan la càrrega de l'ultracondensador és $Q_0 / 10$. Si una persona es treu el rellotge després d'haver-lo portat durant molt de temps, quants dies triga en aturar-se?

E) Un condensador pla té paper com a dielèctric (constant dielèctrica $\kappa$ = 3.7, gruix $d$ = 0.1 mm). Quina hauria de ser la superfície $S$ de les seves plaques per a tenir la mateixa capacitat que el que fa funcionar el rellotge ($C$ = 1 F)? [Ajut: $C = \frac{\varepsilon \cdot S}{d}$, $\varepsilon = \kappa \cdot \varepsilon_0$ i $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$ ]

F) Podem fer servir un condensador com el de l'apartat D) per al rellotge, o cal un ultracondensador com el de C)? Per què?

**SOLUCIÓ:** A) $\frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt}$, B) i C) $Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, D) 2.98 ≈ 3 dies, E) 3 km$^2$,
F) Cal un ultracondensador perquè un rellotge de pulsera de 3 km$^2$ seria bastant incòmode!

**A.2)** En una indústria hi ha un dipòsit, que inicialment conté 100 litres d'una dissolució formada per dissolvent i 10 kg d'un producte químic dissolt (solut). En aquest dipòsit es connecta una entrada de dissolvent pur a 3 litres per minut. La barreja s'homogeneïtza ràpidament per agitació mecànica, de forma continuada, i s'extreu per a utilitzar-la a un procés industrial, a un ritme de 2 litres per minut.
A) Plantegeu l'equació diferencial que relaciona la variació de massa de solut amb el temps.
B) Obteniu la massa de solut en funció del temps, aplicant integrals definides.
C) Repetiu l'apartat B), però ara aplicant integrals indefinides.
D) Quants kg de solut hi haurà al dipòsit després d'una hora?

**SOLUCIÓ:** A) $dm = -2 \frac{m}{100+t} dt$, B) i C) $m = \frac{10^5}{(100+t)^2}$, D) 3.9 kg

**A.3)** Per a un estudi de contaminació energètica, es sap que el radi es desintegra de manera que en 1.600 anys n'ha desaparegut la meitat. ¿Quin % del radi inicial ha desaparegut en 100 anys?
[Ajut: la velocitat de desintegració del radi (massa per unitat de temps) és proporcional a la quantitat del mateix]

**SOLUCIÓ:** Un 4.2%

**A.4)** En un procés industrial, una bola de coure s'escalfa fins a una temperatura de 100ºC. Després, a l'instant de temps $t = 0$, es submergeix en aigua que es manté a 30ºC. Passats 3 minuts, la temperatura de la bola s'ha reduït fins a 70ºC.

A) Intuïtivament (és a dir, sense fer cap càlcul), a quin valor assimptòtic espereu que tendeixi la temperatura de la bola per a temps suficientment grans? [el farem servir a l'apartat D)]

B) Plantegeu l'equació diferencial de la temperatura. [Ajut: segons la llei de refredament de Newton, la velocitat amb que varia la temperatura d'un cos és proporcional a la diferència tèrmica amb el medi que l'envolta]

C) Trobeu l'equació de la temperatura en funció del temps.

D) Comproveu el resultat de C), mirant si el $\lim_{t \to \infty} T$ dóna el mateix resultat que heu predit intuïtivament a l'apartat A).

E) Quin és el valor de la constant a la llei de refredament de Newton per a aquesta esfera?

F) ¿Quant de temps cal esperar si volem que la temperatura baixi fins a 31ºC?

**SOLUCIÓ:** A) 30ºC B) $\frac{dT}{dt} = -k(T-30)$, C) $T = 30 + 70e^{-kt}$,

E) $k = 0.1865 \text{ min}^{-1}$, F) 23 minuts.

**A. 5)** Un tanc industrial cilíndric de 1.5 m d'alçada descansa sobre la seva base de 1 m de diàmetre. Inicialment està ple d'aigua. En el fons hi ha un orifici de 1 cm de diàmetre, connectat a una aixeta.
[Ajut: Segons la llei de Torricelli-Borda, la velocitat de sortida és $0.6\sqrt{2gh}$, on *h* és la profunditat o alçada d'aigua]

A) Plantegeu l'equació diferencial de l'alçada d'aigua.

B) Trobeu l'alçada de l'aigua en el tanc en funció del temps *t* que porta oberta l'aixeta.

C) Trobeu els temps en què el tanc te aigua fins la meitat, la quarta part i quan es buida del tot.

**SOLUCIÓ:** A) $\frac{dh}{dt} = -0.002656\sqrt{h}$ (on *h* es mesura en cm), B) $h = \left(12.25 - 0.001328\,t\right)^2$,

C) 45 minuts, 77 minuts i 154 minuts.

**A.6)** Determineu quant de temps trigarà en sortir l'aigua que omple una caldera semiesfèrica de 2m de diàmetre, si surt per un forat circular que hi ha al fons i te 0.1m de radi.
[Ajut: Apliqueu la llei de Torricelli-Borda]

**SOLUCIÓ:** 35 segons

**A.7)** A una planta industrial hi ha un tanc amb 200 litres d'aigua i 40 g de solut dissolt. Per un tub entren 5 litres d'una altra dissolució per minut, cadascun dels quals conté 2 g del mateix solut. La barreja al tanc es manté uniforme agitant-la. Per una aixeta, surt barreja al mateix ritme que n'entra.

[Ajut: recordeu que la solució de les equacions diferencials lineals no homogènies de primer ordre, $y' + p(x)y = r(x)$, és $y(x) = e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)} r(x)dx + c\right]$, on $h(x) \equiv \int p(x)dx$ i $c$ constant]

A) Raoneu intuïtivament (és a dir, sense fer cap càlcul) si la concentració ($c$) augmentarà, disminuirà o es mantindrà constant. A quin valor tendirà per a temps grans ($t \to \infty$)?

B) Raoneu intuïtivament si la quantitat de solut dins el tanc $m(t)$ augmentarà o disminuirà, i a quin valor tendirà quan $t \to \infty$.

C) Plantegeu l'equació diferencial per a la massa $m(t)$ del solut dins el tanc, i resoleu-la.

D) A partir del resultat de C), trobeu el valor assimptòtic de $m$ per a $t \to \infty$, i comproveu que coincideix amb el resultat de B).

E) Quant temps ha de passar perquè la concentració al tanc hagi augmentat fins a 1.75 g/l ?

F) Si al tanc el flux d'entrada fos el doble, plantegeu l'equació diferencial i el mètode de resolució.

**SOLUCIÓ:** A) augmentarà fins a 2 g/l, B) augmentarà fins a 400 g,

C) $dm/dt + 5m/200 = 10$, $m(t) = 400 - 360e^{-0.025t}$ (on $m$ es mesura en grams i $t$ en minuts),

E) 79 min, F) $dm/dt + 5m/(200+5t) = 20$.

**A.8)** Per a dissenyar un sistema d'il·luminació, sabem que en una atmosfera saturada de boira a una distància $l = 3$ m s'absorbeix la meitat de la intensitat inicial $I_0$.

A) Trobeu l'equació de la intensitat de llum $I$ en funció de la distància $l$.

[Ajut: a distàncies curtes, la intensitat absorbida és proporcional a la incident i a la distància]

B) Feu una gràfica de la intensitat en funció de la distància $l$.

C) Quin percentatge de llum inicial arribarà a una distància de 12 m?

**SOLUCIÓ:** A) $I = \dfrac{I_0}{2^{l/3}}$, C) Un 6 % aproximadament.

**A.9)** La resistència d'un fluid al moviment de sòlids dins seu és molt important en enginyeria i aerodinàmica. Recordeu que el número de Reynolds es defineix com $N_{\mathrm{Re}} = \rho L v / \mu$ ($\rho$ és la densitat del fluid, $L$ una longitud característica del sòlid, $v$ la velocitat relativa sòlid-fluid i $\mu$ la viscositat dinàmica del fluid). Hi ha dos casos [B.S. Anderek, American Journal of Physics 67, 538 (1999)]:

A) Si $N_{\mathrm{Re}} < 1$ (règim laminar, no turbulent), la força de resistència $R$ que fa el fluid és proporcional a la velocitat $v$ (llei de Stokes): per a un sòlid esfèric de radi $r$, $R = 6\pi\mu r v$.

B) Si $N_{\mathrm{Re}} > 1$ (velocitats grans, hi ha turbulència), $R$ és proporcional al quadrat de la velocitat: $R = bv^2$ (on la constant $b$ depèn essencialment del sòlid).

Per a cada cas, determineu la velocitat en funció del temps, $v(t)$, d'una esfera de massa $m$ que cau verticalment dins el fluid (menyspreeu l'empenta del fluid), i trobeu la velocitat límit, $v_{\lim}$ (definida com el límit per a $t \to \infty$). Comproveu-ne les unitats.

C) Depèn $v_{\lim}$ de la velocitat inicial? Feu la gràfica de $v(t)$ per a $v_0 > v_{\lim}$ i $v_0 < v_{\lim}$. Com seria al buit?

D) Quina serà la velocitat límit d'una esfera de $r = 1\,\mathrm{mm}$, m=0.1 g i $b = 30$ kg/m si es mou dins aigua [$\mu = 1.8\cdot 10^{-3}$ kg/(m·s)]? I dins glicerina [$\mu = 1.1$ kg/(m·s), $\rho = 1260$ kg/m$^3$]?

**SOLUCIÓ:** A) $v(t) = \dfrac{mg - (mg - 6\pi\mu r v_0)e^{-6\pi\mu r t/m}}{6\pi\mu r} \to \dfrac{mg}{6\pi\mu r}$.

B) $$v(t) = \frac{\sqrt{\dfrac{mg}{b}}\left(1 + \dfrac{v_0 - \sqrt{\dfrac{mg}{b}}}{v_0 + \sqrt{\dfrac{mg}{b}}}\, e^{-2t\sqrt{\frac{b}{mg}}}\right)}{1 - \dfrac{v_0 - \sqrt{\dfrac{mg}{b}}}{v_0 + \sqrt{\dfrac{mg}{b}}}\, e^{-2t\sqrt{\frac{b}{mg}}}} \to \sqrt{\frac{mg}{b}}\,.$$

D) 5.7 mm/s (aigua), 47 mm/s (glicerina) .

**A.10)** A una indústria química hi ha un tanc de 300 litres. L'omplim d'aigua, i afegim un pols que es diposita al fons, formant un pòsit. Aquest pòsit està format per una barreja de compostos solubles i indissolubles, i es va dissolent a un ritme proporcional a la diferència entre la concentració de la dissolució i la de saturació (1 kg de pòsit per 3 litres d'aigua). Després de 1 minut observem que s'ha dissolt 1/3 kg de pòsit.

A) Trobeu la massa de pòsit dissolt ($m$) en funció del temps ($t$).

B) Feu una gràfica de la massa de pòsit dissolt en funció del temps.

C) Quant pòsit s'haurà dissolt després de 1 hora?

**SOLUCIÓ:** A) $m = 100\left(1 - e^{-0.003339\,t}\right)$. C) 18.15 kg.

**B. Aplicacions d'equacions diferencials ordinàries de segon ordre:**

**B.1)** Un esmorteïdor d'una màquina industrial te una costant d'esmorteïment $k = 890$ N/m. La massa de la part mòbil de la màquina és de 9.082 kg, i parteix del repòs a 15 cm de l'equilibri. Si volem que les oscil·lacions s'hagin amortit fins a un 0.4% en menys de 1 segon, determineu si les següents constants d'esmorteïment són acceptables o no.
A) 200 kg/s
B) 100 kg/s
C) En el segon cas, quantes vegades oscil·la per minut? I en quin % són més lentes les oscil·lacions que si l'esmorteïment fos menyspreable?

**SOLUCIÓ:** A) Sí [l'equació és $x(t) = 0.2463e^{-6.19t} - 0.0963e^{-15.83t}$ ].
B) No [l'equació és $x(t) = e^{-5.506t}\left(0.15\cos(8.225t) + 0.1004\sin(8.225t)\right)$ ].
C) 78.6 oscil·lacions/minut; un 17%.

**B.2)** La màquina del problema B.1), apartat B), està sotmesa durant un procés industrial a una força exterior $F_{ext}(t) = 705\,\mathrm{N}\cos(\omega\, t)$. Si les normes de seguretat exigeixen una amplitud de les oscil·lacions inferior a 80 cm, trobeu l'interval de valors de $\omega$ a $F_{ext}(t)$ que cal evitar.

**SOLUCIÓ:** 1.6 a 8.5 rad/s [l'equació de l'amplitud és $\dfrac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$, on $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$ ].

**B.3)** Es vol dissenyar un sintonitzador de ràdio fent servir un circuit RLC en sèrie amb $C = 1\,\mathrm{nF}$. Si volem que amplifiqui una emissora de $10^6$ Hz, trobeu el valor de L. Feu-ho de dues formes diferents:
A) Aplicant l'equació de l'amplitud ja demostrada al problema B.2)
B) Aplicant la representació fasorial (o complexa) del corrent altern.

**SOLUCIÓ:** 25.3 μH [l'equació de l'amplitud és $\dfrac{\varepsilon_{\max}\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}}$ ].

## C. Aplicacions de sèries de Taylor

**C.1)** A) Trobeu, amb precisió d'una dècima de segon i sense resolució numèrica d'equacions implícites, l'instant de temps per al qual el pistó d'un motor industrial és a 9.93 cm de la posició d'equilibri, si el seu moviment és supra-amortit i ve donat per $x = 0.2e^{-6\cdot 10^{-3}t} - 0.1e^{-5\cdot 10^{-3}t}$ [en unitats del Sistema Internacional (S.I.)]

Ajut: Recordeu que la fórmula de Taylor en voltant de $x = 0$ (sèrie de MacLaurin) és:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + O(x^3)\,,$$

on $O(x^3)$ indica termes de tercer ordre i superiors.

B) Comproveu la validesa de les aproximacions aplicades.

**SOLUCIÓ: 1.0 segons**

**C.2)** La intensitat d'un circuit microelectrònic ve donada per la següent expressió, en unitats S.I.: $I = 0.1\left[\sin(10^{-3}t) + 2\cos(10^{-3}t)\right]e^{-3\cdot 10^{-5}t}$.

A) Trobeu, amb precisió de 1 segon i sense necessitat de resolució numèrica d'equacions implícites, l'instant de temps per al qual $I = 202.65$ mA.

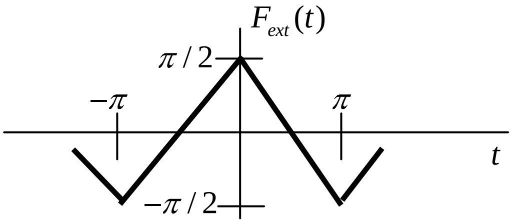
B) Comproveu la validesa de les aproximacions aplicades.

**SOLUCIÓ: 28 segons**

## D. Aplicacions de sèries de Fourier

**D.1)** Una màquina industrial te una peça de massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ que oscil·la amb constant elàstica $k = 25\,\mathrm{kg/s^2}$, coeficient d'esmorteïment 0.02 kg/s i sotmesa a la força exterior (en unitats S.I.):

$$F_{ext} = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad -\pi < t < 0 \\ -t + \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad 0 < t < \pi \end{cases} \qquad F_{ext}(t + 2\pi) = F_{ext}(t)$$




A) Expresseu $F_{ext}(t)$ en sèrie de Fourier.

Ajut: Recordeu que si $f(x)$ te període $2L$, es pot expressar en sèrie de Fourier com:

$$f(x) = c_0 + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right],$$

on els coeficients de Fourier venen donats per les fórmules d'Euler:

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{2L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx \end{cases}$$

B) Apliqueu el resultat de A) per a trobar l'amplitud de les oscil·lacions a temps grans. Com és la freqüència d'aquestes oscil·lacions, en comparació amb la de la força exterior?

*Nota: Adoneu-vos que aquesta mateixa tècnica és útil en enginyeria electrònica (per al càlcul de la intensitat a circuits).*

**SOLUCIÓ:** A) $F_{ext}(t) = \dfrac{4}{\pi}\left( \cos t + \dfrac{1}{3^2}\cos(3t) + \dfrac{1}{5^2}\cos(5t) + \ldots \right)$.

B) $0.51\,\mathrm{m}$; 5 vegades més

[l'equació és $x(t) \approx 0.51\cos(5t - \delta)$, i els altres termes són menyspreables].

**E. Aplicacions d'equacions diferencials amb vàries variables independents (derivades parcials)**

**E.1)** A moltes indústries es necessita endurir barres de metall. Per això, en un procés anomenat carburització, s'escalfen en una atmosfera de carboni, el qual a alta temperatura es difon cap a dins del metall i l'endureix. Una vegada completada la carburització, la temperatura es fa disminuir submergint la barra en líquid fred (W.D.Callister, *Fundamentals of materials science and engineering*, cap. 6).

A) Considereu una barra molt més llarga que ampla, de coordenada transversal *x*. Demostreu que lluny dels extrems, suposant una solució de variables separades, $T(x,t) = F(x)\, G(t)$, es compleixen les equacions diferencials $\frac{d^2F}{dx^2} = -p^2 F(x)$ i $\frac{dG}{dt} = -c^2 p^2 G(t)$, on *p* no depèn de *x* ni de *t*.

Ajut: recordeu que la llei de Fourier de conducció de calor implica que $\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, on $c^2 = \frac{K}{\sigma\, \rho}$, essent *K* la conductivitat tèrmica, $\sigma$ la calor específica (per unitat de massa) i $\rho$ la densitat.

B) Trobeu la solució general de la temperatura $T(x,t)$ dins una barra de gruix *L*, en funció del temps *t* i la posició *x*, si les superfícies de la barra ($x = 0$ i $x = L$) es mantenen a 0ºC.

C) Si inicialment la temperatura és $T(x,t=0) = 100\,^{\circ}\text{C} \sin\frac{\pi x}{80}$, on *x* està en cm, i la barra és de coure ($K = 0.95 \frac{\text{cal}}{\text{cm s ºC}}$, $\sigma = 0.092 \frac{\text{cal}}{\text{g ºC}}$, $\rho = 8.92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) i te 80 cm de llarg, trobeu la temperatura en funció de l'espai i el temps.

D) Quant de temps triga la temperatura del centre de la barra C) en baixar fins a la meitat del seu valor inicial?

**SOLUCIÓ:** B) $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t} \right)$, on $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$.

C) $T(x,t) = 100 \sin\frac{\pi x}{80} e^{-0.001785\, t}$.

D) 6.5 minuts.

**E.2)** Trobeu l'evolució temporal del camp tèrmic si, al problema anterior, la condició inicial fos: $T(x,t=0) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x < L/2 \\ L - x & \text{si} \quad 0 < x < L/2 \end{cases}$, on *T* es mesura en ºC i *x* en cm.

Ajut: Si $f(x)$ és definida només a 0<x<*L*, es pot expressar en sèrie de Fourier com:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left( \frac{n\pi}{L} x \right)$, on els coeficients de Fourier venen donats per:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

**SOLUCIÓ:** $T(x,t) = \frac{4L}{\pi^2} \left( \sin\frac{\pi x}{L} e^{-\left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 t} - \frac{1}{9} \sin\frac{3\pi x}{L} e^{-\left(\frac{3c\pi}{L}\right)^2 t} + \ldots \right)$

*Bibliografia:*

· E. Kreyszig, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, ed. Limusa Wiley, 2000, 3ª ed., 2 vols (signatura biblioteca UdG: 517 KRE)

· B. Demidovich, *Problemas y ejercicios de análisis matemático,* ed. Paraninfo, 1982, 7ª ed., pp. 367-369.