Oscil·lacions mecàniques esmorteïdes i forçades

Objectiu

Estudiar l'oscil·lació esmorteïda i forçada d'una barra fixada per un extrem. Estudiar la ressonància.

Fonament teòric

Oscil·lacions esmorteïdes: una barra elàstica fixada per un dels extrems pot vibrar si l'altre extrem es desplaça una certa distància i s'abandona després el sistema. Aquesta vibració s'anirà esmorteint més o menys ràpidament en funció del material i de la geometria de la barra, la distribució de masses, i el ritme de transmissió d'energia a l'exterior del sistema.

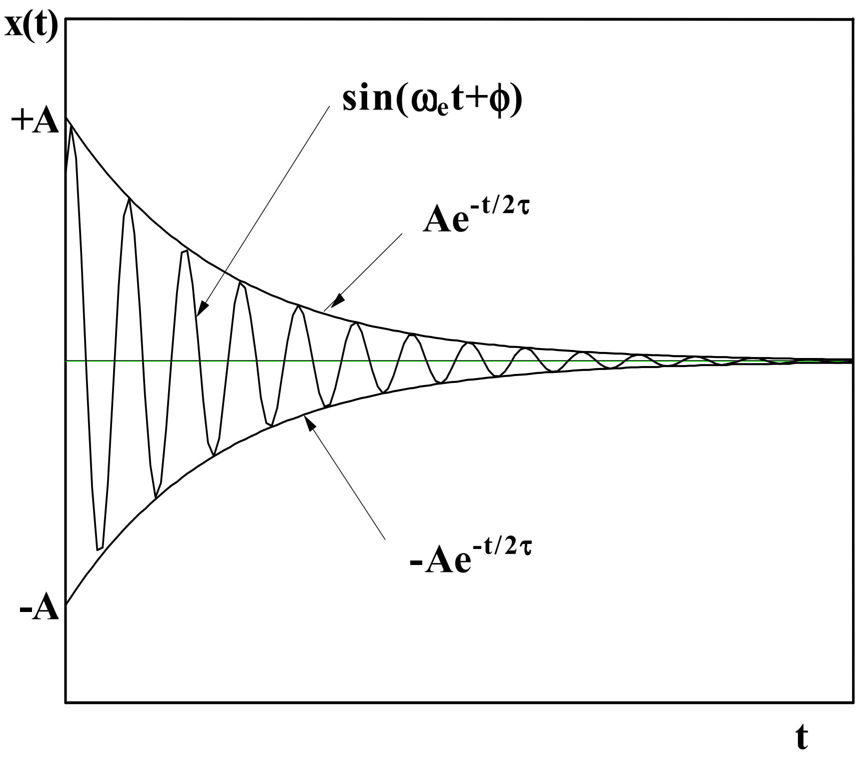
L'equació que descriu un moviment oscil·latori esmorteït és:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau}\sin(\omega_e t + \phi)$$

on $x(t)$ és l'elongació (separació de la posició d'equilibri) d'un punt del sistema, τ el temps característic de l'extinció de l'energia de l'oscil·lació (2τ correspon aleshores a l'extinció de l'amplitud), A i ϕ són respectivament l'amplitud i la fase inicials (lligades a les condicions inicials del moviment), i ω_e és la pulsació de les oscil·lacions esmorteïdes. A l'equació de moviment es pot veure que aquest consisteix en una oscil·lació modulada per una amplitud que decreix exponencialment amb el temps,

$$A(t) = Ae^{-t/2\tau} \qquad (1)$$

com es pot veure a la representació gràfica:



Si apliquem logaritmes neperians a l'equació (1) s'obté l'expressió de :

$$\mathrm{Ln}[A(t)] = -\frac{1}{2\tau} t + \mathrm{Ln}A_0$$

Si es representa gràficament Ln[A(t)] en funció del temps dóna lloc a una recta, on el seu pendent permet calcular experimental ment el valor de τ.

Per altra banda, la pulsació de les oscil·lacions esmorteïdes s'expressa:

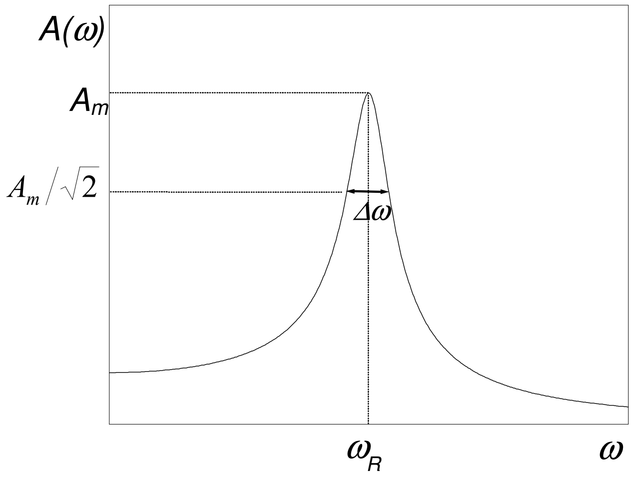
$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \qquad (2)$$

on ω_0 seria la pulsació del sistema si no hi hagués esmorteïment.

Oscil·lacions forçades: Si al sistema oscil·lant se li adapta un mecanisme que imposi una vibració harmònica de freqüència *f* que es mantingui en el temps, el moviment és aleshores de tipus harmònic amb freqüència *f*. Com que el mecanisme exterior és el que provoca la vibració, anomenem *f* la freqüència forçant. El sistema oscil·la aleshores amb una amplitud que depèn de *f* (o ω): $A(\omega)$.

La forma de la funció $A(\omega)$ es mostra a la figura. Hi ha un valor de ω, la pulsació de ressonància ω_R, pel qual l'amplada d'oscil·lació pren un valor màxim A_m: es tracta de la pulsació de ressonància, que s'expressa:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}} \qquad (3)$$



A la figura es troba representada l'amplada de la corba, $\Delta\omega$, que correspon a l'interval de la pulsació pel qual l'amplada d'oscil·lació encara es manté per sobre de $A_m/\sqrt{2}$. Aquesta amplada es relaciona amb el temps d'extinció de la manera següent:

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau}$$

El valor de l'amplitud, A, de l'oscil·lador forçat es pot calcular en funció de la freqüència de l'oscil·lació, ω, i la freqüència natural de l'oscil·lador, ω_o, mitjançant l'expressió:

$$A = \frac{F_o / m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{1}{\tau^2}\omega^2}} \qquad (4)$$

On F_o correspon a la força impulsora i m és la massa de l'objecte que oscil·la.

Si apliquem logaritmes neperians a l'equació (4) s'obté l'expressió:

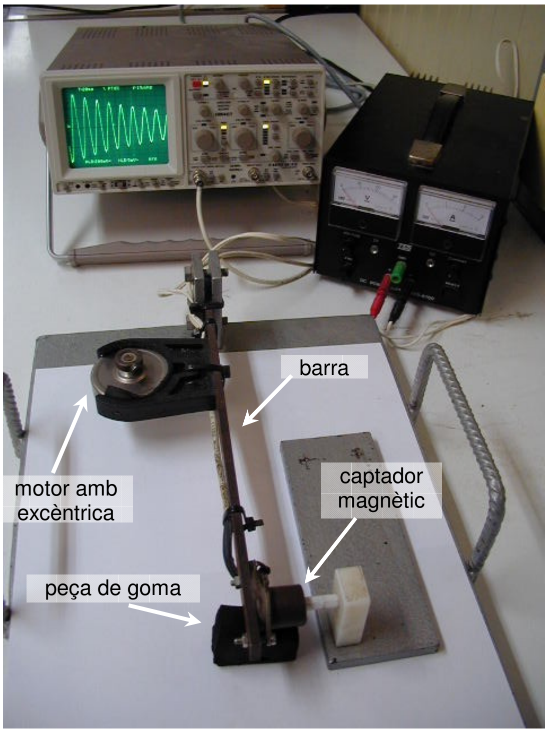
$$\mathrm{Ln}[A(\omega)] = \mathrm{Ln}\left(\frac{F_o}{m}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left[\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{1}{\tau^2}\omega^2\right]$$

Si es representa gràficament Ln[A(ω)] en funció del $-\mathrm{Ln}\left[\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{1}{\tau^2}\omega^2\right]$ dóna lloc a una recta de pendent ½ i ordenada a l'origen $\mathrm{Ln}\left[\frac{F_o}{m}\right]$.

Si l'esmorteïment és petit (τ gran), les pulsacions ω_0 , ω_e i ω_R són molt semblants.

Mètode operatiu

A la fotografia es pot observar el muntatge de la pràctica. El sistema oscil·lant és una barra metàl·lica fixada per un extrem, i amb un motor collat. A l'eix del motor hi ha una peça excèntrica que proporcionarà els impulsos per forçar l'oscil·lació. La freqüència forçant pot ser ajustada variant la velocitat de gir del motor, mitjançant la font d'alimentació. També es disposa d'un captador magnètic que proporciona un senyal elèctric (tensió) que es visualitza a la pantalla de l'oscil·loscopi. Assumim que l'amplada del senyal elèctric es correspon a l'amplada de les oscil·lacions.



Hi ha la possibilitat d'augmentar l'esmorteïment del sistema posant una peça de goma entre el sòcol i l'extrem de la barra en el qual hi ha el motor. Si no s'hi posa, les oscil·lacions s'esmorteeixen lentament. Quan s'hi posa, les oscil·lacions decauen de seguida, i de fet la corba de ressonància serà més ampla. En aquesta pràctica treballarem sempre amb el màxim esmorteïment possible, és a dir, amb la peça de goma en contacte amb l'oscil·lador.

Oscil·lacions esmorteïdes.

a) Connecteu l'oscil·loscopi, i, en absència d'oscil·lacions, feu coincidir la representació del senyal amb la referència horitzontal del centre de la pantalla.

b) Sense connectar el motor, i sense la peça de goma, feu oscil·lar el sistema per tal d'observar les oscil·lacions lliures. Mesureu el període (T) i calculeu ω_o .

c) Poseu la peça de goma per augmentar l'esmorteïment. Feu oscil·lar el sistema. Utilitzeu la memòria de l'oscil·loscopi digital per capturar una imatge d'aquestes oscil·lacions. Alguns oscil·loscopis digitals disposen d'opcions que faciliten la mesura de tensions i intervals de temps sobre la pantalla. Si cal, demaneu ajut al professor.

d) Un cop tingueu una imatge prou bona, mesureu l'amplitud del senyal per diferents valors de temps (t). Aneu omplint la taula:

Temps (t) (s)	Amplitud del senyal, *A(t)* (V)	Ln[A(t)]

e) Mesureu el període de l'oscil·lació esmorteïda.

f) Representeu gràficament Ln [A(t)] en funció del temps (t). La determinació del pendent d'aquest gràfic permet determinar el valor experimental de τ.

Oscil·lacions forçades

g) Connecteu la font d'alimentació del motor i observeu les oscil·lacions a la pantalla.

h) Ajusteu la tensió de la font per cercar la freqüència de ressonància. Utilitzeu les opcions de memòria de l'oscil·loscopi per bloquejar la imatge. Mesureu l'amplitud del senyal, així com la seva freqüència.

i) Canvieu lleument la freqüència forçant, i repetiu les mesures de l'apartat h). Repetiu el procés fins obtenir unes quantes combinacions de valors de A i ω, propers a la ressonància, tant per sota com per sobre d'aquesta. Les oscil·lacions observades a la pantalla de l'oscil·loscopi han de ser aproximadament sinusoïdals. Considereu que el valor τ és el mateix que el que s'obté en l'apartat f). Aneu omplint la taula:

Freqüència f (Hz)	Pulsació ω(rad/s)	Amplitud del senyal, A (V)	Ln[(A(ω)]	$\mathrm{Ln}\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{1}{\tau^2}\omega^2$

Tractament de dades i qüestions

Esmorteïdes

1) Completeu la taula Ln [A(t)] en funció del temps (t) amb les dades obtingudes amb l'oscil·loscopi. Representeu el gràfic corresponent.

2) Obteniu el pendent de la recta pel mètode dels mínims quadrats. A partir del pendent determineu el valor de τ.

3) A partir de la imatge obtinguda amb l'oscil·loscopi (experimental), en el moviment oscil·latori esmorteït, determineu la ω_e.

4) Emprant l'equació (2) i ω_e obtingut en l'apartat anterior determina ω_o.

Forçades

5) Completeu la taula Ln[(A(ω)] en funció de -Ln$\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{1}{\tau^2}\omega^2$ emprant el valor de τ obtingut en l'apartat 2).

6) Representeu el gràfic Ln[(A(t)] en funció de -Ln$\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{1}{\tau^2}\omega^2$. Verifiqueu pel mètode dels mínims quadrats que el pendent correspon a 1/2 i determineu F_o/m

7) Feu la gràfica de A en funció de ω. A partir d'aquesta gràfica de ressonància feu una estimació de ω_R (valor màxim) i de τ (obtinguda com $\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau}$) .

8) Emprant l'equació (4) i el condicionant de determinació de màxims, determineu el valor de ω_R. Compareu aquest valor amb el que s'obté a l'apart 6). S'assemblen? Quin percentatge d'error hi ha entre els dos valors?

9) Per què s'empra el mateix valor de τ obtingut a partir de les oscil·lacions esmorteïdes i a les forçades?

10) Per què a les llantes de les rodes dels cotxes es posen unes petites peces de plom? (de vegades poden estar amagades pels embellidors)

11) La ressonància és molt important en enginyeria i arquitectura (adoneu-vos que en aquest darrer cas, la força exterior és causada pel vent). Si un esmorteïdor de cotxe es pot aproximar a una molla de k = $1.6\cdot10^5$ N/m i m=1000 kg, per a quin període mitjà dels sotracs es produeix la màxima incomoditat per als passatgers? [ajut: recordeu que $\omega_0 \sim \omega_n = (k/m)^{1/2}$].

Oscil·lacions mecàniques esmorteïdes i forçades

Esmorteïdes

1) Per les oscil·lacions esmorteïdes, feu el gràfic Ln [A(t)] en funció del temps (t).

2) Obteniu el pendent de la recta pel mètode dels mínims quadrats. A partir del pendent determineu el valor de τ.

3) A partir de la imatge obtinguda amb l'oscil·loscopi, en el moviment oscil·latori esmorteït, determineu la ω_e. Emprant l'equació (2) calculeu ω_o.

Forçades

4) Per les oscil·lacions forçades, representeu el gràfic Ln[(A(t)] en funció de -Ln $\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{1}{\tau^2}\omega^2$.

Verifiqueu pel mètode dels mínims quadrats que el pendent correspon a 1/2 i determineu $F_o/_m$

.

5) Obteniu el pendent de la recta pel mètode dels mínims quadrats i verifiqueu que el pendent correspon a 1/2 . Determineu $F_o/_m$.

6) Feu la gràfica de A en funció de ω i A partir d'aquesta gràfica de ressonància feu una estimació de ω_R i de τ (obtinguda com $\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau}$) .

7) Emprant l'equació (4) i el condicionant de determinació de màxims, determineu el valor de ω_R . Compareu aquest valor amb el que s'obté en l'apart 6). S'assemblen? Quin percentatge representa la seva diferència?

8) Per què s'empra el mateix valor de τ obtingut a partir de les oscil·lacions esmorteïdes en les forçades?

9)Per què a les llantes de les rodes dels cotxes es posen unes petites peces de plom? (de vegades poden estar amagades pels embellidors).

10) La ressonància és molt important en enginyeria i arquitectura (adoneu-vos que en aquest darrer cas, la força exterior és causada pel vent). Si un esmorteïdor de cotxe es pot aproximar a una molla de k = $1.6 \cdot 10^5$ N/m i m=1000 kg, per a quin període mitjà dels sotracs es produeix la màxima incomoditat per als passatgers? [ajut: recordeu que $\omega_0 \sim \omega_n = (k/m)^{1/2}$].