

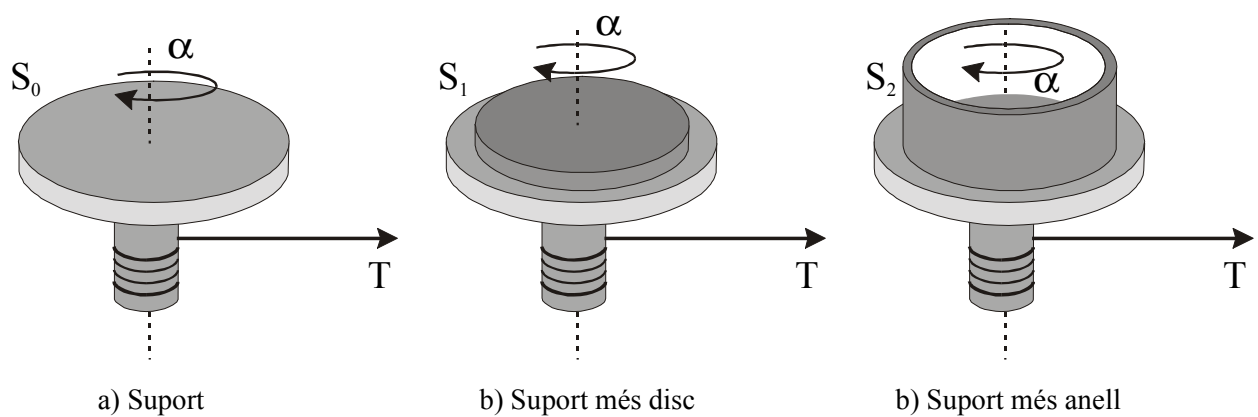
# Mesura de moments d'inèrcia

## Objectiu

Obtenir experimentalment els moments d'inèrcia d'un disc i d'un anell per un mètode dinàmic. Comparar els resultats amb les previsions teòriques.

## Fonament teòric

El moment d'inèrcia d'un cos és la resistència que ofereix a verificar canvis en el seu moviment de rotació (igual que la massa ho fa respecte al seu moviment lineal). És un paràmetre que depèn de la distribució de la massa del cos respecte al seu eix de rotació. En aquesta pràctica es trobaran i es compararan els moments d'inèrcia d'un anell i un disc, respecte als seus eixos. En realitat es treballarà amb els tres sistemes representats a continuació:



El disc i l'anell tenen aproximadament la mateixa massa. El radi exterior del disc és igual al radi mitjà de l'anell. Es trobaran els moments d'inèrcia dels tres sistemes S<sub>0</sub>, S<sub>1</sub> i S<sub>2</sub>, i després es restarà el moment d'inèrcia del suport als dos darrers, o sigui,  $I_{\text{disc}} = I_{\text{suport+disc}} - I_{\text{suport}}$  (igual per l'anell) per trobar així els moments d'inèrcia del disc i de l'anell. D'aquesta manera els moments d'inèrcia serviran per comparar l'efecte de la distribució de massa al voltant de l'eix de rotació.

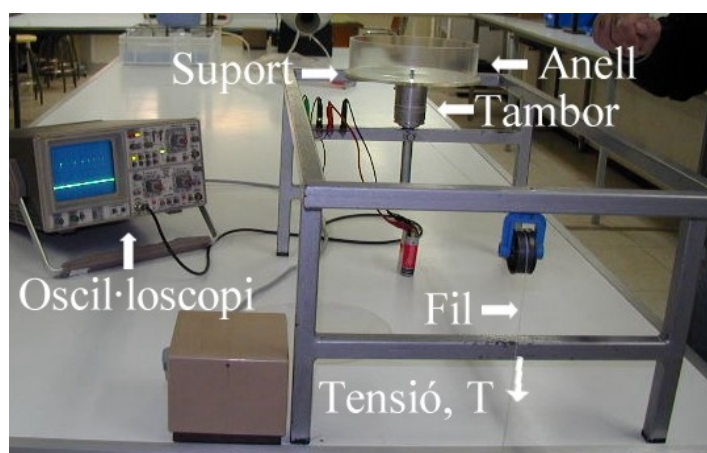


Figura 1. Muntatge experimental.

Per tal de trobar experimentalment els moments d'inèrcia es disposa d'un muntatge com el de la figura 1.

La massa  $m$  (suma de les masses de les peses i el portapeses) provoca una tensió constant en el fil,  $T$ , que es troba enrotllat en el tambor. Es produeix així un moment de força sobre el sistema compost pel tambor, el disc suport i el cos que s'ha d'estudiar, i el conjunt gira amb acceleració angular constant. Podem

dir que sobre el tambor actua tangencialment una força, que val:

$$T = m(g - a)$$

on  $a$  és l'acceleració de les peses. Si  $r$  és el radi del tambor, es produeix un moment respecte a l'eix de rotació  $e$ , de valor:

$$M_e = T \cdot r = m(g - a) \cdot r$$

el qual provoca una rotació tal que

$$M_e = I_e \alpha$$

on  $I_e$  és el moment d'inèrcia total respecte  $e$ , i  $\alpha$  l'acceleració angular del sistema en rotació, que es pot relacionar amb  $a$  segons:

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

Combinant les expressions anteriors obtenim:

$$I_e = mr \left( \frac{g}{\alpha} - r \right)$$

Totes les variables del segon terme de l'equació anterior poden ser mesurades directament, excepte l'acceleració angular, que en aquesta pràctica serà trobada experimentalment. A aquest efecte hi ha una barrera fotoelèctrica a prop del suport giratori. Aquest suport té una peça opaca i lleugera que interromp la barrera cada cop que tot el sistema completa una volta. La barrera envia aleshores un impuls elèctric a un oscil·loscopi, a la pantalla del qual es podrà observar el ritme de pas de la peça, és a dir, el temps que triga el sistema a completar cada volta (l'eix  $x$  és el temporal i l'eix  $y$  és el de voltatge). A partir d'aquests valors es pot trobar  $\alpha$  segons l'equació d'un moviment accelerat:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

on  $\theta$  és l'angle,  $\theta_0$  l'angle inicial,  $\omega$  la velocitat angular,  $\omega_0$  la velocitat angular inicial i  $t$  el temps. Cal alliberar el sistema de manera que  $\theta_0$  i  $\omega_0$  siguin nuls, d'aquesta manera l'acceleració angular només dependrà de la posició del sistema i del temps, mesurables ambdós experimentalment.

### Mètode operatiu

- 1) Mesureu el radi  $r$  del tambor amb un peu de rei.
- 2) Peseu la massa de l'anell i del disc, i mesureu el radi del disc i els radis extern i intern de l'anell.
- 3) Poseu una massa fixa al portapeses (per exemple 30 g) i peseu el conjunt. Aquesta serà la massa  $m$ .
- 4) Connecteu l'alimentació de la barrera fotoelèctrica a una font de corrent i el senyal de sortida a l'oscil·loscopi. Connecteu la memòria d'aquest (premeu el botó *stor*).
- 5) Enrotlleu el fil en el tambor, només amb el suport (sistema  $S_0$ ), poseu la peça opaca enfront de la barrera, de manera que aquesta envii senyal, i allibereu el sistema de manera que  $\theta_0$  i  $\omega_0$  siguin zero. Congeleu la pantalla de l'oscil·loscopi quan el sistema hagi donat unes quantes voltes (amb cinc o sis n'hi ha prou) (premeu el botó *hold*).
- 6) Anoteu els temps en els quals s'han produït les interrupcions successives de la barrera fotoelèctrica, comptant des de l'instant en què s'ha iniciat el moviment.

7) Opereu igualment per als sistemes  $S_1$  i  $S_2$ .

### Tractament de dades i qüestions

1) Anoteu les dades següents:  $r$  (radi del tambor);  $m_a$  (massa anell);  $m_d$  (massa disc);  $m$  (massa peses i portapeses);  $r_a$  (radi mitjà de l'anell) i  $r_d$  (radi del disc).

2) Completeu la taula següent:

	$\theta$ (rad)					
Suport	$t$ (s)					
	$t^2$ (s)					
Suport més disc	$t$ (s)					
	$t^2$ (s)					
Suport més anell	$t$ (s)					
	$t^2$ (s)					

3) Representeu, en una mateixa gràfica per als tres sistemes, els valors de l'angle girat en funció del quadrat del temps. Per què s'utilitza el quadrat del temps?

4) Ajusteu rectes als punts representats i obteniu-ne els pendents. A partir dels pendents calculeu les respectives acceleracions angulars.

5) Quins moments d'inèrcia  $I_0$ ,  $I_1$  i  $I_2$  s'obtenen per als sistemes  $S_0$ ,  $S_1$  i  $S_2$ ?

6) Quins moments d'inèrcia s'obtenen experimentalment per l'anell i el disc? Quin és més gran? Per què?

7) Sabent que el moment d'inèrcia d'un anell de gruix negligible es pot calcular teòricament com a  $I_a = m_a r_a^2$  i el d'un disc com a  $I_d = \frac{1}{2} m_d r_d^2$ , calculeu aquests valors teòrics i compareu-los amb el resultat de l'apartat 6.

8) En els ascensors s'utilitzen volants inercials per tal de limitar l'acceleració de caiguda de l'ascensor quan el seu motor deixa d'operar. En aquestes condicions el sistema és similar al descrit en la pràctica, on el portapeses feria el paper d'ascensor. Determineu el moment d'inèrcia del volant si l'acceleració màxima permesa és de  $0,15 \text{ m}^2/\text{s}$ , la massa de l'ascensor amb l'equipatge és de  $250 \text{ kg}$  i el radi del tambor al que estan units el cable de l'ascensor i el volant és de  $10 \text{ cm}$ . Nota, una acceleració de  $0,15 \text{ m}^2/\text{s}$  estableix una velocitat màxima de  $3 \text{ m/s}$  després d'un desplaçament  $30 \text{ m}$ , es a dir un recorregut equivalent a  $10$  pisos.

# Mesura de moments d'inèrcia

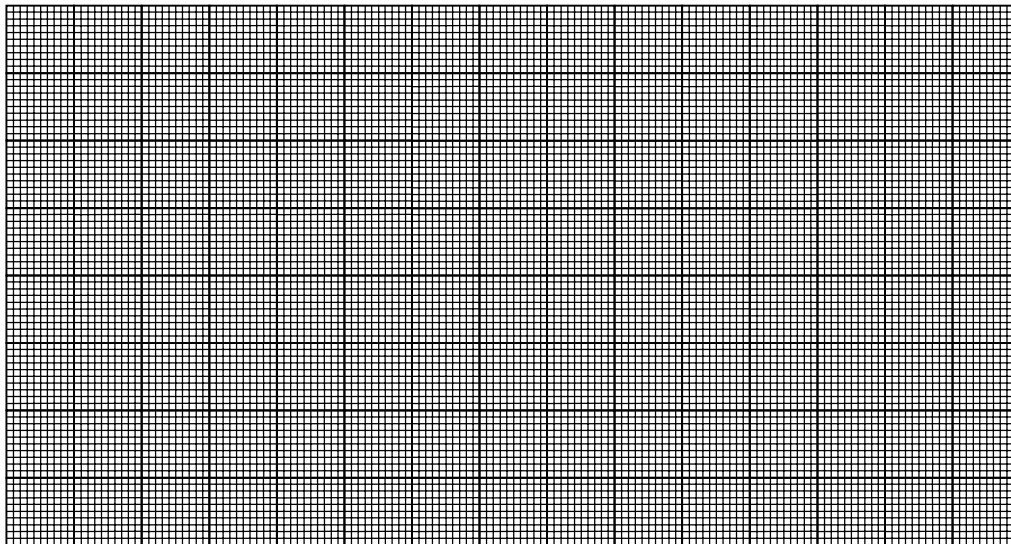
1) Anoteu les dades següents:

$r$  (radi del tambor)=  $m$  (massa peses i portapeses)=  
 $r_d$  (radi del disc)=  $m_d$  (massa disc)=  
 $r_a$  (radi mig de l'anell)=  $m_a$  (massa anell)=

2) Completeu la taula següent:

	$\theta$ (rad)				
Suport	$t$ (s)				
	$t^2$ (s)				
Suport més disc	$t$ (s)				
	$t^2$ (s)				
Suport més anell	$t$ (s)				
	$t^2$ (s)				

3) Representeu en una mateixa gràfica pels tres sistemes, els valors de l'angle girat en funció del quadrat del temps. Mitjançant regressió lineal ajusteu rectes als punts representats i obteniu els seus pendents. A partir dels pendents calculeu les respectives acceleracions angulars.



$\alpha_0 =$

$\alpha_1 =$

$\alpha_2 =$

4) Calculeu els moments d'inèrcia  $I_0$ ,  $I_1$  i  $I_2$  pels sistemes  $S_0$ ,  $S_1$  i  $S_2$  de forma experimental. Calculeu els moments d'inèrcia del disc i de l'anell. Sabent que el moment d'inèrcia d'un anell de gruix menyspreable es pot calcular teòricament com  $I_a = m_a r_a^2$  i el d'un disc com  $I_d = \frac{1}{2} m_d r_d^2$ , calculeu aquests valors teòrics i compareu-los amb els resultats experimentals. Indiqueu quin cos presenta un moment d'inèrcia major i perquè.

$I_0(\text{exp}) =$

$I_1(\text{exp}) =$

$I_d(\text{exp}) = I_1 - I_0 =$

$I_2(\text{exp}) =$

$I_a(\text{exp}) = I_2 - I_0 =$

$I_d(\text{teòric}) =$

$I_a(\text{teòric}) =$

5) En els ascensors s'utilitzen volants inercials per tal de limitar l'acceleració de caiguda de l'ascensor quan el seu motor deixa d'operar. En aquestes condicions el sistema és similar al descrit en la pràctica, on el portapeses feria el paper d'ascensor. Determineu el moment d'inèrcia del volant si l'acceleració màxima permesa és de  $0,15 \text{ m}^2/\text{s}$ , la massa de l'ascensor amb l'equipatge és de  $250 \text{ kg}$  i el radi del tambor al que estan units el cable de l'ascensor i el volant és de  $10 \text{ cm}$ .