

# Mesura i error

## Mesures i xifres significatives

L'observació d'un fenomen és en general incompleta llevat que doni lloc a una informació quantitativa. Per obtenir aquesta informació es requereix la mesura d'una propietat física (magnitud) directament observable. Totes les mesures experimentals estan afectades per una certa imprecisió inevitable, i l'objectiu principal del denominat càlcul d'errors consisteix en acotar el valor d'aquestes imprecisions, denominades **errors experimentals**.

El valor de les magnituds físiques s'obté directament per mesura de la magnitud, o bé indirectament, dels valors mesurats d'altres magnituds. Resulta impossible arribar a conèixer el valor exacte de cap magnitud, atès que els mitjans experimentals de comparació amb el patró corresponent en les mesures directes sempre estan afectats d'imprecisions. Per això hem de conformar-nos forçosament, en tota mesura, amb un valor aproximat de la magnitud, sempre afectat per un error, que depèn de la sensibilitat de l'instrument utilitzat, el disseny del sistema experimental, l'habilitat de l'experimentador, etc. Tot el que podem fer és acotar aquest error comès, o bé donar un error probable. Parlarem a partir d'ara indiferentment de **cota d'error** o simplement d'**error**. La precisió o incertesa d'una mesura ens permet determinar el nombre de xifres que té sentit associar amb una quantitat. Per exemple, una magnitud mesurada amb una incertesa del 0,1% s'haurà d'expressar amb un màxim de quatre xifres significatives.

Tenim, per exemple:

520,3 m	té 4 xifres significatives
15,2000 V	té 6 xifres significatives
0,00212 g	té 3 xifres significatives, atès que els zeros a l'esquerra només serveixen per determinar el lloc de la coma.

Podem emprar tres regles per determinar el nombre de xifres significatives del resultat d'un càlcul:

1) El resultat de multiplicar o dividir dos números té el mateix nombre de xifres significatives que aquell dels operands que en té menys. Per exemple:  $(7,8 \cdot 23,4562) / 3,1416 = 58$ .

2) El resultat de la suma o resta de dos números no pot tenir xifres significatives més enllà de la darrera xifra en la qual ambdós números originals tenen la xifra significativa. Per exemple:  $3,141592 + 2,10 = 5,24$ .

3) El resultat de les funcions transcendents, com el sinus, arctangent, exponencial i logarítmica es deixa normalment amb el mateix nombre de xifres significatives que l'argument.

Per exemple:  $\sin(36,7^\circ) = 0,598$ ;  $e^{-0,044} = 0,96$ .

Si la cota d'error d'un resultat (veure més endavant) ens determina un nombre de xifres significatives més petit que el nombre de xifres utilitzades, cal arrodonir el valor del resultat, tal com expliquem tot seguit.

*Arrodoniment:* seguirem les normes següents:

a) Si la primera xifra no significativa és més petita que 5, la darrera conservada no es modifica. Per exemple, 42,2626 amb 4 xifres significatives serà 42,26, atès que  $0,0026 < 0,005$ .

b) Si la primera xifra no significativa és més gran que 5, la darrera conservada s'incrementa en una unitat. Per exemple, 15,27 amb 3 xifres significatives serà 15,3, ja que  $0,07 > 0,05$ .

c) Si la primera xifra no significativa és igual a 5, la darrera xifra conservada no es modifica quan és parell, i s'incrementa en una unitat si és senar, de manera que finalment sigui parell. Per exemple, 0,3725 s'arrodoneix a 0,372 i 15,4135 s'arrodoneix a 15,414.

Una cota d'error, però, no s'arrodoneix, sinó que habitualment s'aproxima per excés, tal com es descriu a continuació.

*Aproximació per excés:* consisteix a suprimir les xifres sobrants i sumar la unitat a la darrera xifra expressada. Per exemple:

12,5598 l'aproximem a 12,56

12,5509 a 12,56

12,5550 a 12,56

L'*aproximació per defecte* consisteix a suprimir les xifres sobrants. Per exemple:

12,5598 l'aproximem a 12,55

12,5509 a 12,55

12,5550 a 12,55

## Errors

Quan es parla del valor real d'una magnitud física sempre s'ha d'entendre com una abstracció. Fins i tot en les mesures més acurades els valors que s'obtenen estan afectats per un error. La desviació és la diferència entre el valor obtingut en la mesura i el valor real (que es desconeix). Distingirem dos tipus de desviacions: sistemàtiques i accidentals.

*Desviacions sistemàtiques:* són causades per les limitacions i imperfeccions dels elements de mesura o pels defectes interns de l'aparell de mesura. El disseny del sistema o el mètode experimental afecten també aquest tipus d'errors. Normalment s'agafa com a límit d'aquest error la diferència més petita que es pot apreciar en l'instrument de mesura, és a dir la seva resolució. Altres errors sistemàtics són els que resulten de modificar en una experiència les condicions físiques, com canvis de temperatura, pressió, etc., les quals poden afectar el resultat. La desviació és sistemàtica quan la diferència entre les dades mesurades i el valor real són del mateix sentit i magnitud.

*Desviacions accidentals:* procedeixen de multitud de causes imprevisibles i aleatòries. No es pot assegurar mai que una mesura es pugui repetir exactament en condicions idèntiques. La repetició reiterada d'una mesura realitzada per un mateix observador no sempre porta al mateix resultat. Les mesures es dispersen al voltant d'un valor central. Diem aleshores que l'error accidental té una distribució aleatòria. Existeixen tècniques estadístiques per al tractament d'aquest tipus d'error.

Com a exemple intuïtiu de distinció entre desviació sistemàtica i accidental podem pensar en un fusell amb la mira desviada i un fusell amb la mira ben centrada. Tots dos presenten la mateixa distribució aleatòria dels punts d'impacte, però el fusell amb la mira defectuosa presenta una desviació sistemàtica.

Els errors sempre s'acumulen i per tant l'error total és aleshores la suma de l'error sistemàtic i l'accidental.

## Càlcul d'errors

Per expressar el resultat d'una mesura o un càlcul agafarem en cada cas un valor representatiu del "valor vertader", acompanyat de la cota d'error, de la manera següent:

$$\text{"valor representatiu"} \pm \text{"cota d'error"} \text{"unitat"}$$

L'expressió anterior vol indicar que el "valor vertader" es troba segurament en l'entorn centrat en el valor representatiu i de radi igual a la cota d'error o error absolut. Així, el resultat de qualsevol mesura no ha de ser mai un simple valor  $V$ , sinó que aquest ha d'anar acompanyat de la seva cota d'error  $\Delta V$ , denominada error absolut, o bé de l'error relatiu  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V}$$

L'error relatiu sol expressar-se en percentatges, és a dir:

$$\varepsilon = 100 \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

Els errors absoluts tenen les mateixes unitats que el valor representatiu que acompanyen. En canvi, els relatius no tenen unitats. Quan es considerin errors relatius es donarà el valor representatiu, les unitats, el signe  $\pm$  i l'error relatiu.

Normalment l'error s'expressa amb una xifra significativa. S'en poden posar dues si la primera és un 1, o bé si essent un 2 la segona xifra no és major que 5. Si s'han de suprimir xifres a l'hora d'expressar l'error, s'ha de fer sempre aproximant per excés. Per exemple:

$$1,3458 \rightarrow 1,4$$

$$57,763 \rightarrow 60$$

$$0,0276 \rightarrow 0,03$$

$$247.000 \rightarrow 250.000 \rightarrow 25 \cdot 10^4$$

$$0,0198 \rightarrow 0,020$$

En el tercer cas els zeros de l'esquerra, i en el quart cas els de la dreta, només serveixen per indicar l'ordre decimal. Aquests zeros no són xifres significatives (en el quart cas s'ha utilitzat també la notació exponencial per eliminar-los). En canvi en el cinquè cas el zero de la dreta sí que ho és atès que l'hem obtingut de l'aproximació per excés. Com a norma general, cal que en els resultats quedi clar quines són les xifres significatives. Les següents expressions no signifiquen el mateix:

$$1,2 \pm 0,1$$

$$1,20 \pm 0,01$$

$$1,200 \pm 0,010$$

El valor representatiu s'expressa de manera que la darrera xifra sigui del mateix ordre que l'ordre més baix de l'error. Si s'han de suprimir xifres, en aquest cas es fa per arrodoniment. Per exemple,  $238,63 \pm 8,3$  s'ha de prendre com  $239 \pm 9$ . Es pot utilitzar la notació exponencial, com per exemple:

$$(132,4 \pm 1,1) \cdot 10^6$$

A continuació es presenten algunes regles bàsiques per al tractament dels errors. Cal pensar però que la Teoria d'errors és tota una branca de la ciència i la decisió d'una cota d'error pot arribar a ser realment complicada. Cada tipus d'experiment pot necessitar un tractament especial dels errors, i en general, quan es dona un resultat és interessant explicar com s'ha trobat la cota d'error.

Els errors poden haver-se produït en qualsevol dels processos següents: mesures que només es poden realitzar una vegada, mesures que es poden repetir diverses vegades i càlcul de magnituds amb fórmules (mesura indirecta). Considerarem tot seguit cadascun d'aquests casos en particular.

### **Error d'una mesura feta una sola vegada**

Quan només és possible efectuar una mesura d'una determinada magnitud, no és possible fer una avaluació de l'error accidental. Aleshores admetrem com a valor representatiu el valor mesurat, i la cota d'error com a mínim serà la resolució de l'aparell, o l'interval mínim que permet apreciar. La sensibilitat de l'aparell és el valor de les divisions de les escales dels aparells calibrats (regles, termòmetres, amperímetres, etc.). Per exemple, si volem mesurar una longitud amb un regle mil·limetrat, quan l'extrem de la longitud estigui prop de 30 mm, la cota d'error serà 1 mm, i escriurem:

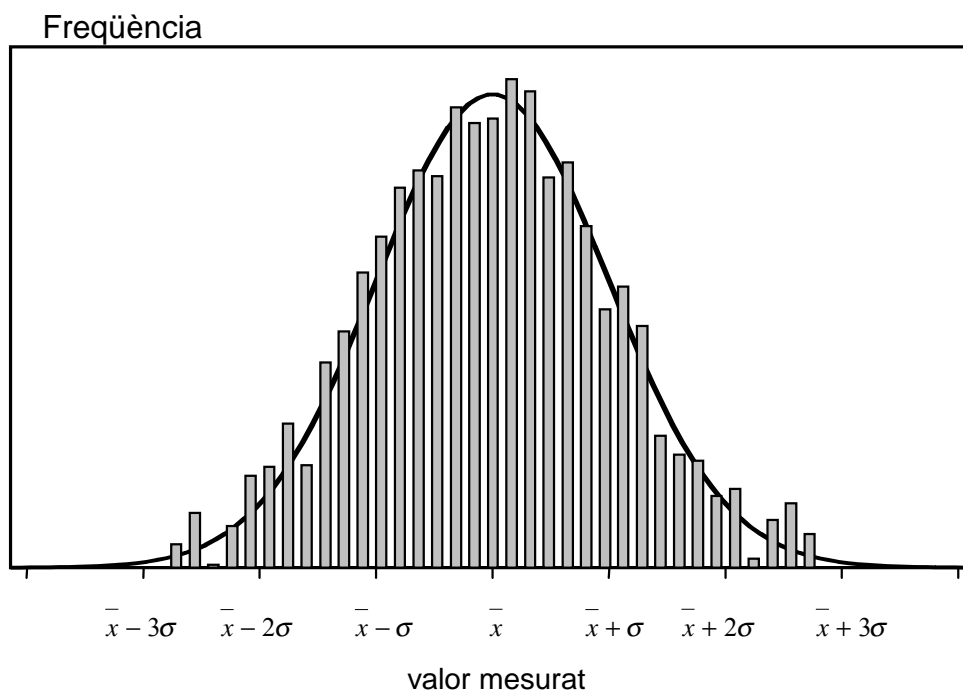
$$30 \pm 1 \text{ mm}$$

La resolució de l'instrument és un valor mínim per a la cota d'error. Altres consideracions lligades al sistema experimental podrien recomanar d'augmentar la cota d'error sistemàtic. D'altra banda, una mesura feta una sola vegada no conté cap estimació de l'error accidental, que podria ser considerable. Sempre que sigui possible, cal augmentar el nombre de mesures fetes en les mateixes condicions.

### Error d'una mesura repetida $n$ vegades

L'objectiu de la repetició de mesures és obtenir un millor valor representatiu i l'avaluació de l'error accidental, i en la mesura que es pugui, la reducció d'aquest fins al nivell de la resolució instrumental.

Considerem el cas en què una certa magnitud es mesura un nombre finit de vegades. El conjunt finit dels diferents resultats constitueix una mostra de la infinitud de resultats possibles que es podrien obtenir de la magnitud. El conjunt infinit de resultats d'una mesura constitueix la població. Podem representar en un eix de coordenades les freqüències d'aparició (per intervals) dels diferents valors de la mostra. A mesura que la mostra conté més valors, la corba formada es va suavitzant, i si prenguéssim intervals infinitesimals de valors, sobre tota la població, obtindríem una distribució que es podria ajustar a la de la figura, que és una distribució en campana de Gauss.



Prendrem com a valor representatiu el valor mitjà dels resultats de les mesures, associat al de màxima freqüència en la distribució de Gauss, que és simètrica. Aquest valor mitjà és definit per:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Associarem l'error a l'amplada de la distribució de Gauss (dispersió dels valors mesurats al voltant del valor mitjà). Un paràmetre que ens dóna idea d'aquesta amplada és la desviació estàndard,  $\sigma$ . Com a referència, direm que el 68.3% de les mesures són compreses entre  $\bar{x} - \sigma$  i  $\bar{x} + \sigma$ , el 95.4% entre  $\bar{x} - 2\sigma$  i  $\bar{x} + 2\sigma$ , i el 99.7% entre  $\bar{x} - 3\sigma$  i  $\bar{x} + 3\sigma$ . Com que només tenim una mostra finita de valors, no podem pas conèixer exactament la desviació estàndard. Però podem utilitzar com a valor representatiu:

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

on  $x_i$  són els valors dins la mostra i  $n$  és el nombre de valors.

La teoria estadística demostra que es pot expressar l'error absolut accidental de la mitjana d'una mesura repetida  $n$  vegades de la manera següent (el factor 3 s'ha triat com a paràmetre de confiança per assegurar una cota d'error força conservadora):

$$3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La quantitat  $\sigma / \sqrt{n}$  és anomenada desviació estàndard de la mitjana.

La repetició de mesures en les mateixes condicions permet reduir la contribució dels errors accidentals. Quan la cota d'error accidental és inferior al sistemàtic no té sentit repetir les mesures. L'estadística no pot mai reduir l'error sistemàtic, i si es vol una mesura més precisa cal millorar el sistema de mesura.

*Exemple de tractament d'una mesura repetida:* suposem que pesem quatre vegades un cos, amb una balança que aprecia 0,1 mg, i obtenim els valors següents: 29,8 mg, 30,2 mg, 28,6 mg i 29,7 mg. La mitjana aritmètica és:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{118,3}{4} = 29,575 \text{ mg}$$

i la desviació val:

$$\sigma_{n-1} = 0,69 \text{ mg}$$

Podem expressar:

$$\bar{x} \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \pm \text{resolució} = 29,6 \pm 1,0 \pm 0,1 \text{ mg} \approx 29,6 \pm 1,1 \text{ mg}$$

En aquesta experiència tindria sentit realitzar més mesures, fins a obtenir una cota d'error estadístic almenys de l'ordre de l'error instrumental (i encara millor un ordre de magnitud inferior, i l'error total quedaria limitat a l'instrumental). Es podria arribar aleshores a donar el valor representatiu amb una altra xifra significativa.

Quan el nombre de mesures és petit, els valors experimentals que cauen fora de l'interval  $\bar{x} \pm 3\sigma$ , són considerats anòmals i moltes vegades s'eliminen del conjunt de dades que intervenen en els càlculs.

### Càlcul d'errors en magnituds de mesura indirecta

En aquest cas la magnitud de la qual es vol determinar el valor és una certa funció d'aquelles magnituds que mesurem directament al laboratori. Si  $A$  és la magnitud que cal calcular, en general tindrem:

$$A = f(x, y, z, \dots)$$

en què  $x, y, z, \dots$  són les magnituds que mesurem al laboratori. Interessa conèixer quina és la cota d'error en  $A$  en funció de les magnituds mesurades i les seves cotes d'error. Parlem aleshores de propagació d'errors. Si anomenem  $\Delta A$  el valor absolut de la cota d'error en  $A$ , i  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  els errors absoluts de  $x, y, z, \dots$ , podem escriure, diferenciant  $A$ :

$$\Delta A = \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial A}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \Delta z + \dots$$

Hi ha a més algunes consideracions que cal fer en el càlcul dels errors absoluts i relatius, que han de ser afegides a les regles anteriors. Sense ser exhaustius, podem tenir en compte que:

a) Sempre que fem servir una constant física, una característica d'un aparell, que no estigui acompanyada d'una cota d'error, es considerarà que aquesta és una unitat de l'ordre de la darrera xifra significativa.

b) En el cas de números no expressables amb un nombre finit de xifres, tals com els periòdics o els irracionals com  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  o  $e$ , tenim l'opció d'agafar moltes xifres decimals per negligir la seva contribució a l'error total, o prendre un nombre petit de xifres decimals, i considerar un error igual a la unitat de l'ordre de la darrera xifra agafada. Per exemple, si en una fórmula substituïm, en fer el càlcul,  $\sqrt{2}$  per 1,414, haurem de tenir en compte un error de 0,001 en aquesta xifra.

*Exemple de càlcul amb propagació d'errors:* Volem calcular el volum d'un cilindre, en què el seu diàmetre és  $D = 1,79 \pm 0,02$  cm, i la longitud de la generatriu  $l = 6,99 \pm 0,02$  cm. L'equació que relaciona aquestes magnituds amb el volum és:

$$V = \frac{\pi D^2 l}{4}$$

i substituint els valors obtenim  $V = 17,59$  cm<sup>3</sup>.

L'error absolut és (suposem que prenem per a  $\pi$  un valor amb prou xifres decimals per negligir la seva contribució a l'error):

$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial D} \right| \Delta D + \left| \frac{\partial V}{\partial l} \right| \Delta l$$

on

$$\left| \frac{\partial V}{\partial D} \right| = \frac{\pi D l}{2} = 19,65 \text{ cm}^2$$

i

$$\left| \frac{\partial V}{\partial l} \right| = \frac{\pi D^2}{4} = 2,52 \text{ cm}^2$$

Substituint aquests valors i  $\Delta D = 0,02$  cm i  $\Delta l = 0,02$  cm obtenim  $\Delta V = 0,5$  cm<sup>3</sup>. Per tant, expressarem el volum com a:

$$V = 17,6 \pm 0,5 \text{ cm}^3$$

L'error relatiu és:

$$\frac{\Delta V}{V} = 2,5\%$$

*Exemple de càlcul de l'error relatiu amb logaritmes:* podem trobar directament l'error relatiu d'una magnitud quan en la fórmula intervenen productes i quocients, seguint el procés següent:

- Prenent logaritmes en els dos membres de l'equació.
- Diferenciant, tot convertint en positius, tots els membres de la diferencial.
- Suposant que els diferencials coincideixen amb els errors absoluts, i les variables amb els valors representatius, es pot obtenir l'error buscat.

Com a exemple, refarem el càlcul de l'error relatiu (directament) en el cas anterior. Si prenem logaritmes en l'expressió del volum obtenim:

$$\ln V = \ln \frac{\pi}{4} + 2 \ln D + \ln l$$

Diferenciant (i considerant que  $\pi$  té un error tan petit com vulguem, prenent prou xifres significatives) obtenim:

$$\frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta l}{l}$$

Podem veure que hem expressat l'error relatiu en  $V$  en funció dels errors relatius en  $D$  i en  $l$ , que valen:

$$\frac{\Delta D}{D} = 1,1\%, \text{ i } \frac{\Delta l}{l} = 0,3\%.$$

Aleshores tenim:

$$\frac{\Delta V}{V} = 2,5\%$$

com ja havíem trobat.

Finalment, hem de tenir presents dos criteris que ens seran d'utilitat:

“Quan l'operació és una suma o una resta, les cotes d'error absolut se sumen”

“Quan l'operació és un producte o un quocient, les cotes d'error relatiu se sumen”